



2013.
GODINA
LVI



GRAĐEVINSKI MATERIJALI I KONSTRUKCIJE

3

BUILDING MATERIALS AND STRUCTURES

ČASOPIS ZA ISTRAŽIVANJA U OBLASTI MATERIJALA I KONSTRUKCIJA
JOURNAL FOR RESEARCH OF MATERIALS AND STRUCTURES



DRUŠTVO ZA ISPITIVANJE I ISTRAŽIVANJE MATERIJALA I KONSTRUKCIJA SRBIJE
SOCIETY FOR MATERIALS AND STRUCTURES TESTING OF SERBIA

Odlukom Skupštine ***Društva za ispitivanje materijala i konstrukcija***, održane 19. aprila 2011. godine u Beogradu, promenjeno je ime časopisa **Materijali i konstrukcije** i od sada će se časopis publikovati pod imenom **Građevinski materijali i konstrukcije**.

According to the decision of the Assembly of the ***Society for Testing Materials and Structures***, at the meeting held on 19 April 2011 in Belgrade the name of the Journal **Materijali i konstrukcije** (Materials and Structures) is changed into **Building Materials and Structures**.

Professor Radomir Folic
Editor-in-Chief

GRAĐEVINSKI MATERIJALI I KONSTRUKCIJE

BUILDING MATERIALS AND STRUCTURES

ČASOPIS ZA ISTRAŽIVANJA U OBLASTI MATERIJALA I KONSTRUKCIJA
JOURNAL FOR RESEARCH IN THE FIELD OF MATERIALS AND STRUCTURES

INTERNATIONAL EDITORIAL BOARD

Professor **Radimir Folić**, Editor in-Chief
Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad, Serbia
Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Srbija
e-mail: folic@uns.ac.rs

Professor **Mirjana Malešev**, Deputy editor
Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad,
Serbia
Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Srbija
e-mail: miram@uns.ac.rs

Dr **Ksenija Janković**
Institute for Testing Materials, Belgrade, Serbia
Institut za ispitivanje materijala, Beograd, Srbija

Dr **Jose Adam, ICITECH**
Department of Construction Engineering, Valencia,
Spain.

Professor **Radu Banchila**
Dep. of Civil Eng. „Politehnica“ University of
Ternisova, Romania

Professor **Dubravka Bjegović**
Civil Engineering Institute of Croatia, Zagreb, Croatia

Assoc. professor **Meri Cvetkovska**
Faculty of Civil Eng. University "St Kiril and Metodij",
Skopje, Macedonia

Professor **Michael Forde**
University of Edinburgh, Dep. of Environmental Eng.
UK

Dr **Vladimir Gocevski**
Hydro-Quebec, Montreal, Canada

Professor **Miklos Ivanyi**
University of Pecs, Faculty of Engineering,
Hungary.

Professor **Asterios Liolios**
Democritus University of Thrace, Faculty of Civil
Eng., Greece

Predrag Popović
Wiss, Janney, Elstner Associates, Northbrook,
Illinois, USA.

Professor **Tom Schanz**
Ruhr University of Bochum, Germany

Professor **Valeriu Stoin**
Dep. of Civil Eng. „Politehnica“ University of
Ternisova, Romania

Acad. Professor **Miha Tomažević**, SNB and CEI,
Slovenian Academy of Sciences and Arts,

Professor **Mihailo Trifunac**, Civil Eng.
Department University of Southern California, Los
Angeles, USA

Lektori za srpski jezik: Dr **Miloš Zubac**, profesor

Aleksandra Borojev, profesor

Proofreader: Prof. **Jelisaveta Šafranj**, Ph D

Technical editor: **Stoja Todorovic**, e-mail: saska@imk.grf.bg.ac.rs

PUBLISHER

Society for Materials and Structures Testing of Serbia, 11000 Belgrade, Kneza Milosa 9
Telephone: 381 11/3242-589; e-mail: dimk@ptt.rs, veb sajt: www.dimk.rs

REVIEWERS: All papers were reviewed

COVER: Izgradnja garaže "Pionirski park" u Beogradu (foto prof. dr Milan Maksimović)
Construction of garage "Pionirski park" in Belgrade (photo prof. dr Milan Maksimovic)

Financial supports: Ministry of Scientific and Technological Development of the Republic of Serbia

DRUŠTVO ZA ISPITIVANJE I ISTRAŽIVANJE MATERIJALA I KONSTRUKCIJA SRBIJE
SOCIETY FOR MATERIALS AND STRUCTURES TESTING OF SERBIA

GRAĐEVINSKI MATERIJALI I KONSTRUKCIJE

BUILDING MATERIALS AND STRUCTURES

ČASOPIS ZA ISTRAŽIVANJA U OBLASTI MATERIJALA I KONSTRUKCIJA
JOURNAL FOR RESEARCH IN THE FIELD OF MATERIALS AND STRUCTURES

SADRŽAJ

Dragan D. MILAŠINOVIĆ Mila SVILAR Nataša MRĐA Laura TUZA Branislav NOVKOV Ljubomir MILAŠINOVIĆ VISKOELASTIČNA ANALIZA PRETHODNO NAPREGNUTIH BETONSKIH GREDENIH NOSAČA METODOM KONAČNIH TRAKA Originalni naučni rad	3
Dušan GRDIĆ Nenad RISTIĆ Gordana TOPLIČIĆ ČURČIĆ UTICAJ DODATKA RECIKLIRANE GUME I RECIKLIRANOG STAKLA NA PROMENU BRZINE ULTRAZVUKA U BETONU Originalni naučni rad	29
Aleksandar PROKIĆ Martina VOJNIĆ PURČAR LAMINIRANI TANKOZIDNI NOSAČI – DRUGI DEO Originalni naučni rad	43
Uputstvo autorima	54

CONTENTS

Dragan D. MILASINOVIC Mila SVILAR Nataša MRDJA Laura TUZA Branislav NOVKOV Ljubomir MILASINOVIC VISCOELASTIC ANALYSIS OF PRESTRESSED CONCRETE GIRDERS BY THE FINITE STRIP METHOD Original scientific paper	3
Dusan GRDIC Nenad RISTIC Gordana TOPLICIC CURCIC EFFECTS OF ADDITION OF RECYCLED RUBBER AND RECYCLED GLASS ON THE VARIATIONS OF ULTRASONIC VELOCITY IN CONCRETE Original scientific paper	29
Aleksandar PROKIC Martina VOJNIC PURCAR LAMINATED THIN-WALLED BEAMS - SECOND PART Original scientific paper	43
Preview report	54

СГР - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

620.1

GRAĐEVINSKI materijali i konstrukcije :
časopis za istraživanja u oblasti materijala
i konstrukcija = Building Materials and
Structures : journal for research of
materials and structures / editor-in-chief
Radomir Folić. - God. 54, br. 1 (2011)-
- Beograd (Kneza Miloša 9) : Društvo za
ispitivanje i istraživanje materijala i
konstrukcija Srbije, 2011- (Novi Beograd :
Hektor print). - 30 cm

Tromesečno. - Je nastavak: Materijali i
konstrukcije = ISSN 0543-0798
ISSN 2217-8139 = Građevinski materijali i
konstrukcije
COBISS.SR-ID 188695820



VISKOELASTIČNA ANALIZA PRETHODNO NAPREGNUTIH BETONSKIH GREDNIH NOSAČA METODOM KONAČNIH TRAKA

VISCOELASTIC ANALYSIS OF PRESTRESSED CONCRETE GIRDERS BY THE FINITE STRIP METHOD

Dragan D. MILAŠINOVIĆ
Mila SVILAR
Nataša MRĐA
Laura TUZA
Branislav NOVKOV
Ljubomir MILAŠINOVIĆ

ORIGINALNI NAUČNI RAD
ORIGINAL SCIENTIFIC PAPER
UDK: 624.012.36.072.2 = 861

1 UVOD

U klasičnoj teoriji elastičnosti pretpostavlja se da su veze između napona i deformacija linearne i da su nezavisne od vremena. Superpozicija je u važanju i za napone i za deformacije. Zavisnost između napona i deformacija jeste nezavisna - od trenutka kada je opterećenje uvedeno i od trajanja dejstva opterećenja [1].

Poznato je da ponašanje materijala – više ili manje – odstupa od pretpostavki uvedenih u teoriju elastičnosti. Njihovo ponašanje zavisi od toga kako se s vremenom menjaju naponi i deformacije. Eksperimenti s betonom, kao i s nizom drugih konstrukcionih materijala, ukazali su na to da se materijali drugačije ponašaju u slučaju naglo nanešenog opterećenja, a drugačije u slučaju dejstva deformacije koja će se ostvariti za kraće vreme, dakle –

1 INTRODUCTION

In the classical theory of elasticity it is supposed that the stress-strain relationships are linear and independent on time. Superposition is valid for both stresses and strains. The relationships between stresses and strains are independent from the moment when the load is introduced and during the effect of loading [1].

We know that materials behaviour deviates more or less from the hypotheses offered in the elasticity theory. Their behaviour depends on the change of stresses and strains with time. Experiments made with concrete and a number of other construction materials point out they behave differently in the case when the stress is applied suddenly, and when the permanent load is of long-term character. For the realization of strain which is to happen

Prof. dr Dragan D. Milašinović, Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, e-mail: ddmil@gf.uns.ac.rs
Mila Svilar, student doktorskih studija, Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, e-mail: mila.svilar@gmail.com
Nataša Mrđa, student doktorskih studija, Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, e-mail: mnatasa@agfbl.org
Laura Tuza, student doktorskih studija, Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, e-mail: tuzalaura@yahoo.com
Branislav Novkov, student doktorskih studija, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6, e-mail: branislavn@gf.uns.ac.rs
Ljubomir Milašinović, student doktorskih studija, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6, e-mail: ljubomir@uns.ac.rs

Dragan D. Milašinović, PhD, University of Novi Sad, Faculty of Civil Engineering in Subotica, Kozaračka 2a, e-mail: ddmil@gf.uns.ac.rs
Mila Svilar, PhD student, University of Novi Sad, Faculty of Civil Engineering in Subotica, Kozaračka 2a, e-mail: mila.svilar@gmail.com
Nataša Mrđa, , PhD student, University of Novi Sad, Faculty of Civil Engineering in Subotica, Kozaračka 2a, e-mail: mnatasa@agfbl.org
Laura Tuza, PhD student, University of Novi Sad, Faculty of Civil Engineering in Subotica, Kozaračka 2a, e-mail: tuzalaura@yahoo.com
Branislav Novkov, PhD student, University of Novi Sad, Faculty of Technical Sciences, Novi Sad, Serbia, Trg Dositeja Obradovića 6, e-mail: branislavn@gf.uns.ac.rs
Ljubomir Milašinović, PhD student, University of Novi Sad, Faculty of Technical Sciences, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6, e-mail: ljubomir@uns.ac.rs

trajnog tereta neprekidnog karaktera. Za ostvarenje deformacije koja će se ostvariti za kraće vreme, dakle – brže, potreban je veći napon, što važi i obrnuto. Veza između napona i deformacije zavisi od brzine napona i brzine deformacije. U toku eksperimenata može se zapaziti da se napon menja u slučaju nepromenjene deformacije i da se isto dešava sa deformacijom u slučaju nepromenjenog napona.

Teorija linearno viskoelastičnih materijala jeste deo reologije koja se bavi svim problemima u pogledu elastičnosti i viskoznosti konstrukcijskih materijala. Reologija, kao nauka, daje nam mogućnost za sastavljanje i rešavanje diferencijalnih jednačina viskoelastičnih tela [2]. Tela koja imaju elastične i viskozne osobine zovu se viskoelastična tela. Za opisivanje njihovog reološkog ponašanja mi ih možemo smatrati kombinacijom dva tela: idealno elastičnog tela i idealne tečnosti. Elastične osobine obrazuju se po Hukovom zakonu, dok tečnost prati Njutnov zakon. Paralelna kombinacija ovakvog linearno elastičnog tela i idealne tečnosti naziva se viskoelastičan materijal ili Kelvinovo telo (dokazano u nizu eksperimenata). Za Kelvinovo telo karakteristično je da promene deformacija teže graničnoj vrednosti pri konstantnim naponima (za razliku od tečnosti, gde su deformacije neograničene). Obim reoloških studija danas se brzo širi na probleme cikličke varijacije napona [3-5].

Za rešavanje statičkih viskoelastičnih problema prednapregnutih betonskih grednih nosača, u ovom radu uveden je metod konačnih traka. Razlog za uvođenje tog metoda jeste to što je on u rešavanju nekoliko tipova praktičnih problema znatno brži pri rešavanju od mnogo obuhvatnijeg i prilagodljivijeg metoda konačnih elemenata.

U radu su date šire teorijske osnove za ravno i prostorno stanje napona potrebni za problematiku analiziranu metodom konačnih traka u datim primerima. Primeri predstavljaju analizu jednostavnijeg, jednoosijalnog stanja napona, koji se metodom konačnih traka mogu analizirati bez ograničenja širih teorijskih osnova.

2 VISKOELASTIČNE JEDNAČINE BETONA METODOM KONAČNIH TRAKA

2.1 Linearno tečenje betona

Beton se svrstava u grupu materijala koji ima najširu primenu u konstrukterskoj praksi građevinarstva. On poseduje složene reološke osobine koje se opisuju složenim konstitutivnim jednačinama, u zavisnosti od tipa i namene konstrukcije, temperature i vlažnosti sredine, njegove starosti pri opterećenju, dužine vremenskog intervala u kojem deluje opterećenje itd. Pored trenutnih (elastičnih, elastoplastičnih i plastičnih) deformacija koje nastaju odmah posle promene stanja napona, u ovom materijalu se pojavljuju, pri dugotrajnim naponskim stanjima, tokom vremena i deformacije usled tečenja.

Ovde se daje jedna formulacija graničnih zadataka teorije betonskih konstrukcija imajući u vidu sledeće pretpostavke:

- beton se posmatra kao homogen ili homogen po slojevima i izotropan materijal;
- trenutne deformacije su elastične;
- veze između napona i deformacija su linearne i

in a short period of time, that is to say more quickly, a higher stress is necessary, and vice versa. The relationship between stress and strain depends on both the rate of stress, and rate of strain. In the course of the experiments, it could be noticed that the stress alters during unchanged strain and that the same thing happens to the strain during unchanged stress.

The theory of the linearly viscoelastic materials is a part of rheology, which deals with all the problems connected to elasticity and viscosity of construction materials. Rheology, as a science, gives us an opportunity to assemble and process differential equations of the viscoelastic bodies [2]. The bodies which have elastic and viscous feature are called viscoelastic bodies. To describe their rheological behaviour, we can consider these bodies as combinations of these two elements: perfectly elastic body and ideal liquid. The elastic feature is formed by the Hooke's law, while the liquid is the subject of the Newton's law. The parallel combination of such linear elastic body and ideal liquid is called viscoelastic solid material or Kelvin's body, which has been proved in a number of experiments. It is characteristic for the Kelvin's body that the time-dependent changes of strains under the constant stresses tend to reach a certain limit values (as opposed to the liquid, where the strains are unlimited). The scope of rheological studies are expands today rapidly to the problems of cyclic variation of stresses [3-5].

In this paper the finite strip method has introduced in the study of quasy-static viscoelastic behaviour of prestressed concrete girders. The reason for the introduction of this method lies in the fact that resolving of several classes of practical problems it is much faster in comparison with the more comprehensive and adaptable finite element method.

This paper provides the theoretical basis required for the problems analysed by finite strip method in the examples given. Exemples presents analysis of simpler stress state, whitch can be analysed with finite strip method without limitation of wider theoretical basis.

2 FINITE STRIP VISCOELASTIC EQUATIONS OF CONCRETE

2.1 Linear creep of concrete

Concrete belongs to the group of materials which have the most widespread application in the construction practice of civil engineering. It has complex rheological characteristics which are described by complex constitutive equations, depending upon the type and the assignation of the structure, the temperature and the relative humidity of the environment, its age while loaded, the length of time intervals in which the loading has its effect etc. Along with the instantaneous strains (elastic, elastoplastic and plastic) that occur immediately after the alteration of the state of stress, we find strains caused by creep in concrete as well, in the case of sustained load.

We are giving a formulation of limit states in theory of concrete structures, bearing in mind the following presuppositions:

- concrete is viewed as homogeneous as a whole or in layers, and as isotropic material,
- the instantaneous strain is elastic,

formulišu se kao algebarske;

- reološke osobine i parametri se tokom vremena menjaju.

Ove pretpostavke imaju opravdanja za analizu stanja napona i deformacija velikog broja konstrukcija za spoljašnje uticaje koji se javljaju u fazi građenja i eksploatacije [6].

2.2 Konstitutivne viskoelastične jednačine za beton

Ponašanje materijala koje se menja u toku vremena može se ispitivati i eksperimentalno. Pod dejstvom stalnog opterećenja nanetog u određenom trenutku t , eksperimentalnim putem se određuju funkcije tečenja. Funkcija tečenja za beton, u slučaju linearne zavisnosti između deformacije i naprezanja, jeste

$$e(t) = s(t) F(t, t_0) \tag{1}$$

Svaki proizvoljan zakon opterećenja $\sigma = \sigma(t)$ može se prikazati u vidu zbira beskonačno malih konstantnih opterećenja $\delta\sigma_i$ nanetih u trenucima t_i i definisati kao

$$s(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n ds_i g(t_i), \tag{2}$$

gde je:

where

$$g(t_i) = \begin{cases} 0, & t < t_i \\ 1, & t \geq t_i \end{cases} \tag{3}$$

Unoseći (2) u (1) i zamenjujući zbir integralom, dobijamo

By insertion of (2) into (1) and substitution with integral, we obtain

$$e(t) = \int_{t_0}^t \frac{ds(t)}{dt} F(t, t) dt + s(t_0) F(t, t_0), \tag{4}$$

gde je t_0 početak nanošenja opterećenja.

where t_0 represents the beginning of loading.

Stanje napona i deformacija analizira se numeričkim rešavanjem integralne jednačine (4), ili prevođenjem integralne veze na približnu algebarsku. Uvedemo li za funkciju tečenja izraz

The state of stress and strain is analysed through numerical solution of integral equation (4), or by substitution of the integral relationship with approximate algebraic one. If we introduce the following expression for the function of creep

$$F(t, t_0) = \frac{1}{E_0} + \frac{j(t, t_0)}{E_{28}}, \tag{5}$$

u kojem je prvi član na desnoj strani elastični deo, a drugi – odloženi ili zakasneli, integralnu jednačinu (4) možemo formulisati u ekvivalentnom algebarskom obliku

in which the first element on the right side is elastic part, and the second is delayed part, then we can formulate the integral equation(4) in equivalent algebraic form

$$e(t) = \frac{s(t_0)}{E_0} \left[1 + \frac{E_0}{E_{28}} j(t, t_0) \right] + \frac{\Delta s(t)}{E_0} \left[1 + k(t, t_0) j(t, t_0) \right]. \tag{6}$$

Jednačina (6) poznata je kao algebarska jednačina, a ona je ujedno i opšta algebarska, jer se iz nje mogu dobiti sve ostale algebarske veze. U njoj su:

The equation (6) is known as algebraic equation. This equation is at the same time general one, since all the other algebraic relationship can be derived from it. It comprises:

- t – starost betona u posmatranom vremenu;
- t_0 – starost betona u momentu opterećenja;
- $j(t, t_0)$ – koeficijent tečenja;

- t the age of concrete in the observed period of time,
- t_0 the age of concrete at the moment of

• $\Delta S(t)$ – razlika napona u posmatranom vremenu i momentu opterećenja;

- $k(t, t_0)$ – koeficijent starenja;
- E_0 – početni modul elastičnosti;
- E_{28} – modul elastičnosti nakon 28 dana;

- loading,
- $\varphi(t, t_0)$ creep coefficient,
- $\Delta\sigma(t)$ the difference of stress in the observed period of time and at the moment of loading,
- $\kappa(t, t_0)$ ageing coefficient,
- E_0 the initial modulus of elasticity,
- E_{28} the modulus of elasticity after 28 days,

$$k(t, t_0) = \frac{j^{-1}(t, t_0)}{\Delta S(t)} \int_{t_0}^t \frac{dS(t)}{dt} \left[1 + \frac{E_0}{E_{28}} j(t, t) \right] dt - \frac{1}{j(t, t_0)}, \quad (7)$$

$$\Delta S(t) = S(t) - S(t_0). \quad (8)$$

Ako uvedemo parametre:

If we introduce the following parameters:

$$K_1(t) = 1 + \frac{E_0}{E_{28}} j(t, t_0), K_2(t) = 1 + k(t, t_0) j(t, t_0), \quad (9)$$

izraz (6) možemo napisati u obliku

we can write the expression (6) as

$$e(t) = S(t_0) \frac{K_1(t)}{E_0} + \Delta S(t) \frac{K_2(t)}{E_0}. \quad (10)$$

U opštem slučaju anizotropnog tela, broj elastičnih konstanti u vezama oblika (1) treba da bude 21. U izotropnom telu broj konstanti smanjuje se na samo dve. Pri postavljanju zavisnosti između napona i deformacija, koristićemo se principom nezavisnosti dejstva sila i uopštiti jednačinu (1) za slučaj troosnog stanja naprezanja.

In the general case of an anisotropic body, the number of elastic constants in relationships similar to (1) should be 21. With isotropic body the number of constants is reduced to only two. To establish the relationships between stress and strain, we should use the principle of independence of force action and generalize the equation (1) for the case of the three-dimensional state of stress.

$$\begin{aligned} e_x(t) &= s_x(t) F_1(t, t) - (s_y + s_z) F_2(t, t), \\ e_y(t) &= s_y(t) F_1(t, t) - (s_x + s_z) F_2(t, t), \\ e_z(t) &= s_z(t) F_1(t, t) - (s_x + s_y) F_2(t, t), \\ g_{xy}(t) &= t_{xy} F_3(t, t), \\ g_{yz}(t) &= t_{yz} F_3(t, t), \\ g_{xz}(t) &= t_{xz} F_3(t, t). \end{aligned} \quad (11)$$

U izrazima (11) uzeta je u obzir izotropija tela koja se izražava ravnopravnošću pravaca x , y i z . Može se zapaziti da je veličina $\frac{1}{F_1(t, t)}$ analogna modulu elastičnosti E u izotropnom elastičnom telu. Odnos $\frac{F_2(t, t)}{F_1(t, t)}$ analogan je Poisson-ovom koeficijentu n , a veličina $\frac{1}{F_3(t, t)}$ modulu klizanja G .

Kao i u teoriji elastičnosti, gde je važio odnos $G = \frac{E}{2 \cdot (1+n)}$, može se i ovde definisati analogna zavisnost

In the equations (11) the isotropy of the body which is expressed through equality of directions: x , y and z is taken into account. It can be noted that the value $\frac{1}{F_1(t, t)}$ is analogous to the modulus of elasticity E in the isotropic elastic body. The ratio $\frac{F_2(t, t)}{F_1(t, t)}$ is analogous to the Poisson's coefficient n , and the value $\frac{1}{F_3(t, t)}$ is analogous to the shear modulus G .

As in the theory of elasticity, where the expression $G = \frac{E}{2 \cdot (1+n)}$ was valid, we can define analogous dependence here as well

$$\frac{1}{F_3(t,t)} = \frac{1}{F_1(t,t)} \cdot \frac{1}{2 \left(1 + \frac{F_2(t,t)}{F_1(t,t)} \right)}, \quad (12)$$

odakle je

From this it follows that

$$F_3(t,t) = 2 \left[F_1(t,t) + F_2(t,t) \right]. \quad (13)$$

Na ovaj način, od tri funkcije – $F_1(t,t)$, $F_2(t,t)$ i $F_3(t,t)$ – nezavisne su samo dve, a treća je preko njih jednoznačno određena jednačinom (13).

Konstitutivne jednačine (11) dalje ćemo napisati za slučaj dvoosnog stanja naprezanja i korištenjem algebarskih veza (10), a uz pretpostavku da su Poisson-ovi koeficijenti jednaki i nepromenjivi tokom vremena. U mnogobrojnim eksperimentima dobijeni su rezultati o vrednostima ovih koeficijenata, u zavisnosti od sastava betona i uslova u kojima su istraživanja vršena. Pomenuta pretpostavka ima opravdanja, posebno za praktične analize.

Two functions $F_1(t,t)$, $F_2(t,t)$ are independent, while the third one $F_3(t,t)$ is through them uniformly determined by the equation (13).

We shall write the constitutive equations (11) for the case of plane stress by applying algebraic relationships (10) assuming that Poisson's coefficients are equal and constant. Through many experiments were obtained the values of these coefficients. They depend on the structure of concrete and conditions in which the experiments were carried out. The above mentioned assumption is justified, especially for practical analyses.

$$\begin{aligned} e_x(t) &= [s_x(t_0) - s_y(t_0)n] K_1(t) / E_0 + [\Delta s_x(t) - \Delta s_y(t)n] K_2(t) / E_0, \\ e_y(t) &= [s_y(t_0) - s_x(t_0)n] K_1(t) / E_0 + [\Delta s_y(t) - \Delta s_x(t)n] K_2(t) / E_0, \\ g_{xy}(t) &= t_{xy}(t_0) 2(1+n) K_1(t) / E_0 + \Delta t_{xy}(t) 2(1+n) K_2(t) / E_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Ako uvedemo vektore:

If we introduce vectors:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^T(t) &= [e_x(t) \quad e_y(t) \quad g_{xy}(t)], \\ \boldsymbol{\sigma}^T(t_0) &= [s_x(t_0) \quad s_y(t_0) \quad t_{xy}(t_0)], \\ \Delta \boldsymbol{\sigma}^T(t) &= [\Delta s_x(t) \quad \Delta s_y(t) \quad \Delta t_{xy}(t)], \end{aligned} \quad (15)$$

tada jednačine (14) možemo napisati u matičnom obliku

then we can write the equation (14) in matrix form

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\sigma}(t_0) + \mathbf{C}(t) \Delta \boldsymbol{\sigma}(t), \quad (16)$$

gde su:

where

$$\mathbf{C}_0(t) = \begin{bmatrix} 1 & -n & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+n) \end{bmatrix} \frac{K_1(t)}{E_0}, \quad (17)$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -n & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+n) \end{bmatrix} \frac{K_2(t)}{E_0}. \quad (18)$$

Iz izraza (16) možemo izraziti i povećanje napona

On the basis of expression (16) we can express the increase of stress

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{C}^{-1}(t) \boldsymbol{\varepsilon}(t) - \mathbf{C}^{-1}(t) \mathbf{C}_0(t) \boldsymbol{\sigma}(t_0) = \mathbf{D}(t) \boldsymbol{\varepsilon}(t) - \mathbf{D}_0(t) \boldsymbol{\sigma}(t_0), \quad (19)$$

gde su:

where:

$$\mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} 1/(1-n^2) & n/(1-n^2) & 0 \\ n/(1-n^2) & 1/(1-n^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1/[2(1+n)] \end{bmatrix} \frac{E_0}{K_2(t)}, \quad (20)$$

$$\mathbf{D}_0(t) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

2.3 Jednačine ravnoteže za linearno tečenje betona metodom konačnih traka

Počimo od opšteg izraza za energiju deformacije homogenog materijala

$$U = U_m + U_s = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}_0^T(t) \boldsymbol{\sigma}(t) dA + \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^T(t) \mathbf{M}(t) dA. \quad (22)$$

Zadržimo li se samo na linearnim problemima, tada, koristeći izraz (19), možemo definisati promene energija deformacija:

$$\Delta U_m(t) = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}_0^T(t) \mathbf{D}_{11}(t) \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) dA - \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}_0^T(t) \mathbf{D}_0(t) \boldsymbol{\sigma}(t_0) dA, \quad (23)$$

$$\Delta U_s(t) = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^T(t) \mathbf{D}_{22}(t) \boldsymbol{\kappa}(t) dA - \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^T(t) \mathbf{D}_0(t) \mathbf{M}(t_0) dA, \quad (24)$$

gde su:

where

$$\mathbf{D}_{11}(t) = t\mathbf{D}(t) \text{ and } \mathbf{D}_{22}(t) = (t^3/12)\mathbf{D}(t). \quad (25)$$

Trenutne deformacije su elastične, pa imamo:

The instantaneous strains are elastic, so we have:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t_0) &= \mathbf{D}_{11}(t_0) \boldsymbol{\varepsilon}_0(t_0), \\ \mathbf{M}(t_0) &= \mathbf{D}_{22}(t_0) \boldsymbol{\kappa}(t_0), \end{aligned} \quad (26)$$

gde su:

where:

$$\mathbf{D}_{11}(t_0) = \mathbf{D}_{11} \text{ and } \mathbf{D}_{22}(t_0) = \mathbf{D}_{22}. \quad (27)$$

Koristeći izraze (26) za promene energija deformacije, dobijamo:

Using the equations (26) for the strain energy alterations, we get

$$\Delta U_m(t) = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}_0^T(t) \mathbf{D}_{11}(t) \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) dA - \frac{1}{2} \mathbf{D}_0(t) \int_A \boldsymbol{\varepsilon}_0^T(t) \mathbf{D}_{11}(t_0) \boldsymbol{\varepsilon}_0(t_0) dA, \quad (28)$$

$$\Delta U_s(t) = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^T(t) \mathbf{D}_{22}(t) \boldsymbol{\kappa}(t) dA - \frac{1}{2} \mathbf{D}_0(t) \int_A \boldsymbol{\kappa}^T(t) \mathbf{D}_{22}(t_0) \boldsymbol{\kappa}(t_0) dA.$$

Rad spoljašnjih sila koje izazivaju tečenje pišemo u obliku:

The works of external forces that cause the creep are written as:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_u(t) &= -\mathbf{q}_u^T(t) \mathbf{Q}_u, \\ \mathbf{W}_w(t) &= -\mathbf{q}_w^T(t) \mathbf{Q}_w. \end{aligned} \quad (29)$$

Ukupne promene potencijalnih energija su sada:

The total potential energy alterations are now:

$$\Delta\Pi_m(t) = \frac{1}{2} \int_A \mathbf{q}_u^T(t) \mathbf{B}_{u1}^T \mathbf{D}_{11}(t) \mathbf{B}_{u1} \mathbf{q}_u(t) dA - \frac{1}{2} \mathbf{D}_0(t) \int_A \mathbf{q}_u^T(t) \mathbf{B}_{u1}^T \mathbf{D}_{11}(t_0) \mathbf{B}_{u1} \mathbf{q}_u(t_0) dA - \mathbf{q}_u^T(t) \mathbf{Q}_u, \quad (30)$$

$$\Delta\Pi_s(t) = \frac{1}{2} \int_A \mathbf{q}_w^T(t) \mathbf{B}_{w3}^T \mathbf{D}_{22}(t) \mathbf{B}_{w3} \mathbf{q}_w(t) dA - \frac{1}{2} \mathbf{D}_0(t) \int_A \mathbf{q}_w^T(t) \mathbf{B}_{w3}^T \mathbf{D}_{22}(t_0) \mathbf{B}_{w3} \mathbf{q}_w(t_0) dA - \mathbf{q}_w^T(t) \mathbf{Q}_w.$$

Primenom stava o minimumu ukupnih promena potencijalnih energija, diferencirajući (30) po vektorima $\mathbf{q}_u(t)^T$ i $\mathbf{q}_w(t)^T$ dolazimo do sledećih jednačina ravnoteže:

Minimizing with respect to the vectors $\mathbf{q}_u^T(t)$ and $\mathbf{q}_w^T(t)$, leads to the following equations of balance:

$$\hat{\mathbf{K}}_{uu}(t) \mathbf{q}_u(t) = \mathbf{D}_0(t) \hat{\mathbf{K}}_{uu}(t_0) \mathbf{q}_u(t_0) + \mathbf{Q}_u, \quad (31)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{ww}(t) \mathbf{q}_w(t) = \mathbf{D}_0(t) \hat{\mathbf{K}}_{ww}(t_0) \mathbf{q}_w(t_0) + \mathbf{Q}_w.$$

U jednačinama (31) podrazumevajući aproksimaciju po metodu konačnih traka [7] jesu:

Assuming the approximation by the FSM according to [7], in the equations (31) the following is valid:

$$\hat{\mathbf{K}}_{uumn}(t) = \int_A \mathbf{B}_{u1m}^T \mathbf{D}_{11}(t) \mathbf{B}_{u1n} dA,$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{uumn}(t_0) = \int_A \mathbf{B}_{u1m}^T \mathbf{D}_{11}(t_0) \mathbf{B}_{u1n} dA,$$

$$\mathbf{Q}_{um} = \int_A \mathbf{A}_{um}^T \mathbf{p}_u dA, \quad (32)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{wwmn}(t) = \int_A \mathbf{B}_{w3m}^T \mathbf{D}_{22}(t) \mathbf{B}_{w3n} dA,$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{wwmn}(t_0) = \int_A \mathbf{B}_{w3m}^T \mathbf{D}_{22}(t_0) \mathbf{B}_{w3n} dA,$$

$$\mathbf{Q}_{wm} = \int_A \mathbf{A}_{wm}^T \mathbf{p}_w dA.$$

Kako su trenutne deformacije elastične, imamo:

Since the instantaneous strains are elastic, we have

$$\hat{\mathbf{K}}_{uumn}(t_0) \mathbf{q}_{um}(t_0) = \mathbf{Q}_{um}^0, \quad (33)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{wwmn}(t_0) \mathbf{q}_{wm}(t_0) = \mathbf{Q}_{wm}^0.$$

Jednačine ravnoteže (33) jesu linearne jednačine u vremenu t_0 .

These two are equations of balance of linear elasticity at time t_0 . The equations of balance (31) are now:

Jednačine ravnoteže (31) sada su:

now:

$$\hat{\mathbf{K}}_{uumn}(t) \mathbf{q}_{um}(t) = \mathbf{D}_0(t) \mathbf{Q}_{um}^0 + \mathbf{Q}_{um}, \quad (34)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{wwmn}(t) \mathbf{q}_{wm}(t) = \mathbf{D}_0(t) \mathbf{Q}_{wm}^0 + \mathbf{Q}_{wm}.$$

i predstavljaju generalizaciju linearnih jednačina ravnoteže.

They represent the generalisation of the equations of balance of linear elasticity.

Prvo se određuje trenutno elastično rešenje u trenutku opterećenja t_0 . Zatim se za odabrano vreme t proračunavaju koeficijenti tečenja, starenja i na osnovu njih $K_1(t)$ i $K_2(t)$, te se zadatak ponovo rešava.

First we determine the instantaneous elastic solution at the moment of loading t_0 . Then we calculate the coefficients of creep, ageing, and based upon these, $K_1(t)$ and $K_2(t)$, for selected time t . Then we solve the problem again.

Postupak proračuna moguće je sprovesti za bilo koju algebarsku vezu napona i deformacija.

This procedure of the calculation can be performed for any algebraic relationship of strain and stress.

2.4 Računarski program i interfejs za metod konačnih traka

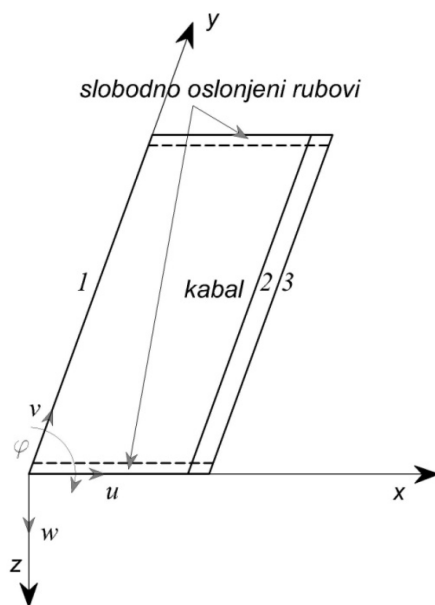
2.4 Finite strip computer program and interface

Jednačine (34) izvedene u tački 2.3 jesu

The equations (34) which were mentioned in section

generalizacija jednačina linearne teorije elastičnosti, a kao rezultat dobijaju se deformacijske i naponske veličine, u zavisnosti od vremena. Ovo omogućava da se već opisani program [7] za rešavanje linearno elastičnih problema proširi i da se pomoću njega omogući prvo rešavanje trenutnog t_0 , linearno elastičnog problema, a zatim da se za proizvoljni trenutak vremena t i sračunate $K_1(t)$ i $K_2(t)$, zadatak još jednom rešava.

Zbog toga i organizacija programa za linearno viskoelastičnu analizu korištenjem konačne trake – prikazane na slici 1, omogućuje da ubacimo petlju po vremenu t u linearno elastičan računarski program ispred petlje po članovima reda. U prvom koraku, rešenje je u vremenu t_0 , dok je u drugom to rešenje u proizvoljnom vremenu t .



Sl. 1. Mreža od dvije konačne trake pločastog nosača gdje je jedna traka kabal za prethodno naprezanje
Figure 1. Two finite strips net of plate girder where one strip is prestressing tendon

Proračun karakteristika konačnih traka za različita vremena omogućen je interfejsom računarskog programa. Interfejs programa „Metod konačnih traka u viskoelastičnim problemima konstrukcija” realizovan je programskim jezikom *Delphi* u razvojnom okruženju *CodeGear RAD Studio 2009*. Pri realizaciji interfejsa, korišćene su standardne biblioteke razvojnog okruženja koje su bile neophodne, uz napomenu da je grafički prikaz konačnih traka urađen pomoću *TeeChart* biblioteke klasa (ver. 8). Radi bolje funkcionalnosti interfejsa, korišćene su i *Developer Express* komponente (ver. 44) i njihove biblioteke klasa koje ne dolaze s pomenutim razvojnim okruženjem, već su naknadno uključene.

Interfejs omogućava unos svih potrebnih parametara za izvršavanje MKTVE algoritma, kao i *real-time* grafički prikaz konačnih traka. Nakon završetka unosa, moguće je generisanje datoteke neophodne za izvršavanje algoritma i poziv pomenutog algoritma. Izvršavanjem algoritma, kreira se datoteka u kojoj su izlazni rezultati. Ulazna i izlazna datoteka čuvaju se u direktorijumu, gde se nalazi i sam MKTVE algoritam.

2.3 are generalization of equations of linear theory of elasticity. These equations provide time-dependent stress and strain values. This allows extending the described program [7] for solving linear elastic problems, so that it enables us first to solve the instantaneous t_0 of the linear elastic problem, and then to solve the problem once more for the arbitrary time t and already calculated $K_1(t)$ and $K_2(t)$.

Owing to this, organization of the program for linear viscoelastic analysis using the finite strip shown in Fig. 1 provides that we can insert the loop of time t in linear elastic computer program in front of the loop of series terms. In the first step it is a solution in the time t_0 , while in the second it is a solution in an arbitrary time t .

The calculation of characteristics of finite strips for different times is enabled by the interface of the computer program. The interface of the "Finite strip method in viscoelastic structural problems" program was implemented in the Delphi programming language using *CodeGear RAD Studio 2009* development environment. In the implementation of interfaces, all the standard libraries of the development environment that were necessary were used, noting that the graphical representation of the finite strips was made using *TeeChart* class library (ver. 8). For better functionality of the interface the *Developer Express* components (ver. 44) were used, which class libraries do not come with the aforementioned development environment but were subsequently included.

Interface allows you to enter all the necessary parameters to execute the finite strip viscoelastic (FSMVE) algorithm and real-time graphical representation of the finite strips. After completing the input it is possible to generate a data file required to execute the algorithm and call the aforementioned algorithm. The execution of the algorithm creates a data file in which the

Na slikama datim u nastavku (2–5), prikazani su delovi interfejsa gde se radi unos svih parametara potrebnih za izvršavanje MKTVE algoritma.

output results are contained. Input and output data file are saved in the directory where the FSMVE algorithm is placed.

On figures 2 - 5, which are given below, the parts of the interface are shown, where all the parameters needed to execute FSMVE algorithm are entered.

METOD KONAČNIH TRAKA U VISKOELASTIČNIM PROBLEMIMA KONSTRUKCIJA

Ukupan broj članova reda Broj stepeni slobode u čvornoj liniji Korak u petlji po članovima reda 1 2 Gde se traži rezultat u t(0) u t Dužina sistema (u mm)

Sl. 2. Unos osnovnih parametara
Figure 2. The input of basic parameters

Tačke čvornih linija u kojima se traže momenti i naponi

Ukupan broj tačaka duž čvorne linije u kojima se traže momenti i naponi

R. br. tačke	Pozicija tačke u mm
1.	500

Sl. 3. Unos tačaka duž čvornih linija u kojima se traže momenti i naponi
Figure 3. The input of points along the nodal lines in which the moments and stresses are calculated

Čvorne linije i koordinate čvornih linija

Ukupan broj čvornih linija (broj mora biti veći od 1)

R. br. linije	X koordinata (u mm)	Z koordinata (u mm)
1.	0	50
2.	0	45.3
3.	0	44.7
4.	0	37.5
5.	0	25
6.	0	12.5

Sl. 4. Unos broja i koordinata čvornih linija
Figure 4. The total number of nodal lines and their coordinates

Konačne trake Čvorne linije sa zadatim ili sprečenim pomeranjem Skoncentrisana i linijski raspoređena opterećenja

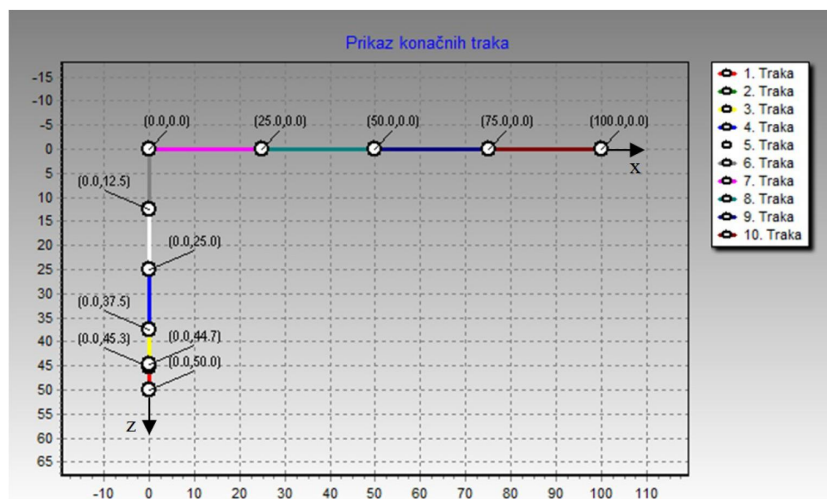
Ukupan broj konačnih traka NBAND (nband se sam preračunava izlaskom iz tablice)

R. br. trake	R. br. prve linije	R. br. druge linije	Debljina trake (u mm)	K1	K2	Modul elastičnosti	Poasonov koef.	Povr. opt. u t(0)	Povr
1.	1	2	5	3.8	3.1	3222	0	0	
2.	2	3	5	1	1	20000	0	0	
3.	3	4	5	3.8	3.1	3222	0	0	
4.	4	5	5	3.8	3.1	3222	0	0	

Sl. 5. Unos konačnih traka, pomeranja i opterećenja
Figure 5. The input of finite strips, their displacements and loads

Na slici 6. dat je grafički prikaz konačnih traka.

On figure 6. the graphical representation of the finite strips is given.



Sl. 6. Grafički prikaz konačnih traka
Figure 6. Graphical representation of the finite strips

3 NUMERIČKI PRIMERI

3 EXAMPLES OF COMPUTATION

3.1 Primer 1 – proračun prethodno napregnutog nosača „I” preseka

3.1 Example 1 – computation of prestressed concrete girder with "I" cross-section

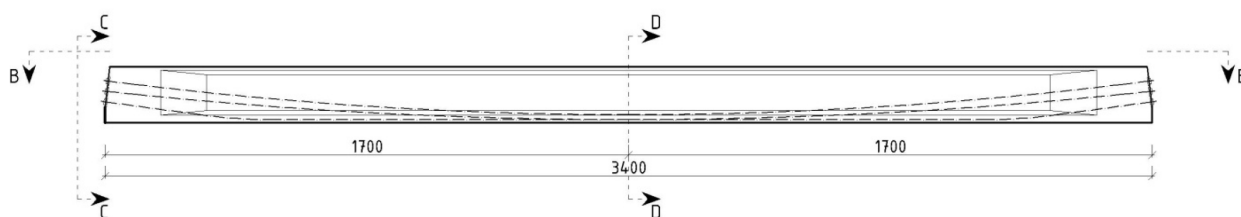
Za prethodno napregnut nosač izvršeno je dimenzionisanje klasičnim proračunom prema teoriji za prethodno napregnute nosače korištenjem literatura [8],[9],[10], koji su onda upoređeni s rezultatima analize dobijenim korišćenjem metode konačnih traka – program MKTVE.

This example presents comparative analysis of calculations of a prestressed concrete girder according to the theory of prestressed concrete using Ref. [8],[9],[10], and to the FSMVE.

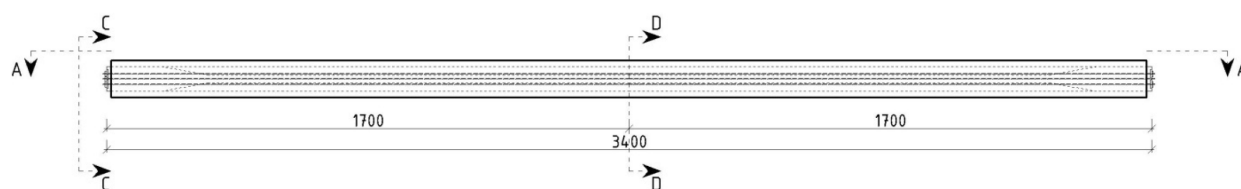
In Fig. 7. basic disposition characteristics of a girder with "I" cross-section are presented:

Na slici 7. date su osnovne dispozicione karakteristike prethodno napregnutog „I” nosača:

izgled A – A:
view A – A:



izgled B – B:
view B – B:



Sl. 7. Osnovne dispozicione karakteristike nosača potrebne za proračun
Figure 7. Basic disposition characteristics of the girder which are required for computation

Predviđeno je da se nosači utežu sa po četiri kabla 12Ø16, s površinom poprečnog preseka $F_k = 18\text{cm}^2 \cdot 4 = 72\text{cm}^2$. Debljina trake koja predstavlja

kablove tada je $t_k = \frac{F_k}{b} = 0.9\text{cm}$.

Ukupna sila prethodnog naprezanja je tada:

$$N_k = 4 \cdot 2345 = 9380\text{kN}.$$

Raspored i detalji kablova u zoni uvođenja sile prethodnog naprezanja i u sredini raspona prikazani su na slici 8. i slici 9:

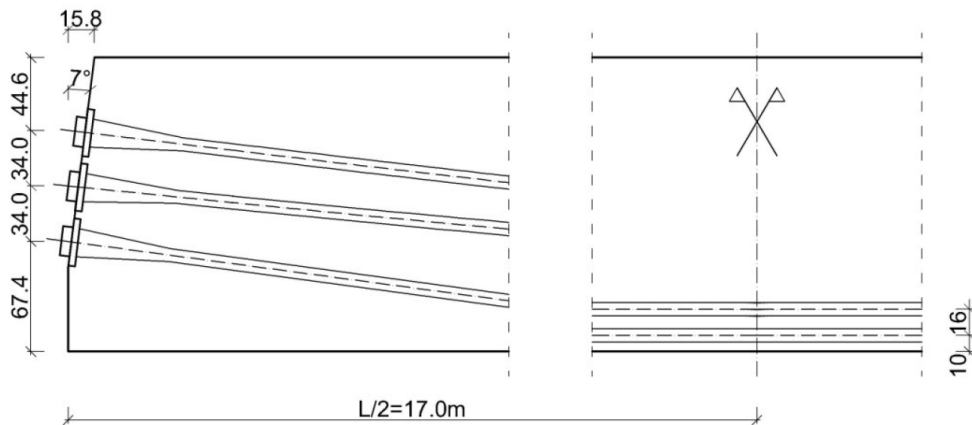
The girder is prestressed with 4 tendons 12Ø16 with cross-section area of $F_k = 18\text{cm}^2 \cdot 4 = 72\text{cm}^2$. The finite strip thickness of tendon is

$$t_k = \frac{F_k}{b} = 0.9\text{cm}.$$

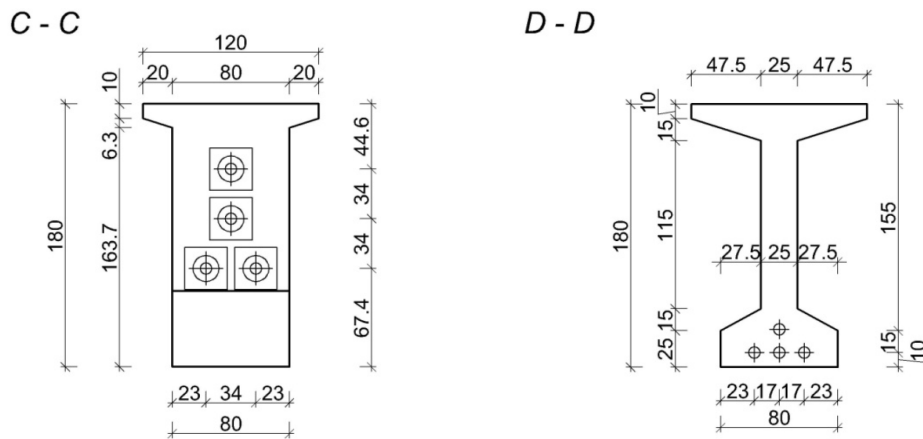
Total prestressing force in the tendons than is

$$N_k = 4 \cdot 2345 = 9380\text{kN}.$$

Dimensions and reinforcement details of girder are presented in Fig. 8 and Fig. 9:



Sl. 8. Plan kablova na čelu nosača i na sredini raspona
Figure 8. Dimensions and tendon layout on the beginning and in the middle of girder



Sl. 9. Raspored i detalji kablova izgled C-C i presek D-D
Figure 9. Dimensions and tendon layout view C-C and cross-section D-D

Radi pojednostavljenja postupka proračuna, za usvojenu trasu kablova uzeta je težišna linija kablova.

Karakteristike betona – kao viskoelastičnog materijala – jesu:

MB 50,

$$E_b = E_0 = E_{28} = 3600\text{kN} / \text{cm}^2,$$

konačna vrednost koeficijenta tečenja – $j = 2.5$,

koeficijent starenja betona – $c = 0.8$,

The median line of all tendons in girder is taken as the tendon route to simplify the computation procedure.

The characteristics of concrete as viscoelastic material are:

C 50,

$$E_b = E_0 = E_{28} = 3600\text{kN} / \text{cm}^2,$$

the final value of creep coefficient: $j = 2.5$,

ageing coefficient: $c = 0.8$,

odakle su parametri:

$$k_1 = 1 + \frac{E_0}{E_{28}} \cdot j = 3.5,$$

$$k_2 = 1 + c \cdot j = 3.0.$$

Modul elastičnosti kablova jeste:

$$E_k = 19500 \text{ kN} / \text{cm}^2,$$

odakle sledi odnos modula elastičnosti čelika i betona

$$n = \frac{E_k}{E_b} = 5.417.$$

Na slici 10. prikazana je mreža konačnih traka, korištena u ovom proračunu. Korištena je konačna traka pločastog nosača s četiri stepena slobode po čvornoj liniji. Poprečni presek diskretizovan je sa deset konačnih traka.

and the following parameters yield:

$$k_1 = 1 + \frac{E_0}{E_{28}} \cdot j = 3.5,$$

$$k_2 = 1 + c \cdot j = 3.0.$$

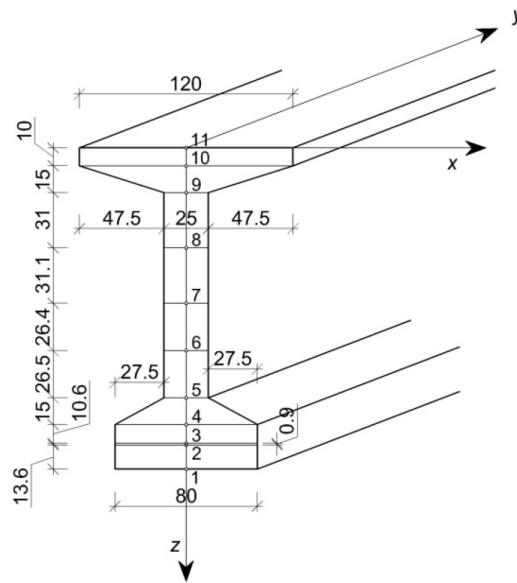
The elastic modulus of prestressing tendon is

$$E_t = 19500 \text{ kN} / \text{cm}^2,$$

and following ratio of modulus of elasticity of steel and concrete yields

$$n = \frac{E_k}{E_b} = 5.417.$$

Fig. 10 presents the mesh of finite strips which was used in this computation. Flat shell finite strip with four degrees of freedom per nodal line was used. Cross-section is discretized with 10 finite strips.



Sl. 10. Mreža konačnih traka sa oznakama čvornih linija
Figure 10. Girder mesh of finite strips with marking nodal lines

Uslovi simetrije:

$$u_1 = \mathbf{L} = u_{11} = 0,$$

$$j_1 = \mathbf{L} = j_{11} = 0.$$

U proračunu je korišteno 89 članova reda. Naponi u čvornim linijama, za presek D - D, računati su prema izrazima:

za vreme $t = 0$:

$$s_{yb}(t_0) = s_{yb}^N(t_0) + \frac{M_{yb}(t_0)}{1 \cdot h^3} \cdot 12 \cdot e, \quad (35)$$

gde je h – debljina trake i e – rastojanje čvorne linije od vlakna u kome se traži napon;

za vreme $t = \infty$:

$$s_{yb}(t_\infty) = s_{yb}(t_0) + \Delta s_{yb}. \quad (36)$$

Symmetry conditions are:

$$u_1 = \mathbf{L} = u_{11} = 0,$$

$$j_1 = \mathbf{L} = j_{11} = 0.$$

In this computation 89 series terms were used. The computation of stresses in nodal lines, for D – D cross-section is carried out according to the following expressions:

At the time $t = 0$:

where h is thickness of a finite strip, and e is displacement from nodal line to the fibre of girder in which stresses are required.

At the time $t = \infty$:

Napon u betonu za traku sa zadatim karakteristikama čelika dobijamo iz izraza:

$$s_{bi} = \frac{s_{si} + s_{s(i+1)}}{2n} \quad (37)$$

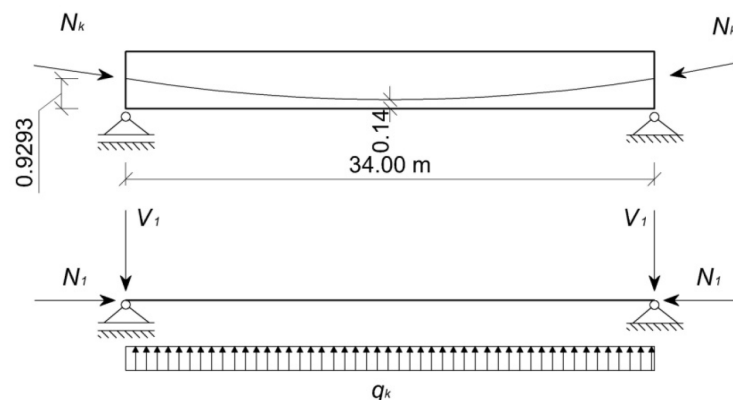
Ispitana su dva slučaja ekvivalentnog opterećenja: Slučaj A) – Ekvivalentno opterećenje računato s padovima sile prethodnog napreznja za presek na sredini raspona, i slučaj B) – Ekvivalentno opterećenje računato s prosečnim padovima sile prethodnog napreznja.

Ekvivalentno opterećenje računamo prvo za proračun po teoriji savijanja grednih nosača (TSG). Na osnovu dobijenih padova sile prethodnog napreznja, prvo određujemo silu prethodnog napreznja N_k , radijus krivine trase kablova R , te vrednost ekvivalentnog raspodeljenog opterećenja $q_k = N_k / R$ za vreme $t = t_0$, i za vreme $t = t_\infty$. Dalje, ekvivalentno opterećenje računamo za proračun po metodi konačnih traka, koje ćemo unositi u program MKTVE.

The stresses in the concrete strips with characteristics of tendon are obtained from

Two cases of equivalent loads are tested: Case A) – Equivalent load calculated with loss of prestressing force for the cross-section in the middle of the span length, and case B) – Equivalent load calculated with the average loss of prestressing force.

First we calculate the equivalent load for the calculation according to the theory of prestressed concrete (TPC). Based on values of losses of prestressing forces obtained, we calculate the prestressing force N_k , radius of curvature of median line of tendons R , and then values of equivalent load $q_k = N_k / R$ mentioned above, at the time $t = t_0$ and at the time $t = t_\infty$. Further, we calculate the equivalent load for the calculation according to the FSMVE.



Sl. 11. Sila prethodnog napreznja i ekvivalentno opterećenje
Figure 11. Prestressing force and equivalent load

3.1.1 Slučaj A) – Ekvivalentno opterećenje računato s padovima sile prethodnog napreznja za presek sredini raspona:

3.1.1 Case A) – Equivalent load calculated with loss of prestressing force for the cross-section in the middle of the span length:

Tabela 1. Ekvivalentno opterećenje za proračun po MKT, za slučaj A)
Table 1. Equivalent load for calculation with FSM, case A)

		TSG TPC		MKTVE FSMVE
		$t = t_0$	$t = t_\infty$	$t = t_0$ i $t = t_\infty$
Pad sile prethodnog napreznja Loss of prestressing force	trenje friction	8,118 % (704,31 kN)	-	8,118 % (704,31 kN)
	kotvljenje anchoring	0	-	0
	elastično skraćenje elastic strains	4,414 % (382,98 kN)	-	-

	Ukupno za $t = t_0$: Total loss at the time $t = t_0$:	12,532% (1087,29 kN)	12,532% (1087,29 kN)	8,118 % (704,31 kN)
	relaksacije čelika, tečenje i skupljanje betona relaxation of steel, creep and shrinkage of concrete	-	25,800% (2238, 09kN)	-
	Ukupno za $t = t_\infty$: Total loss at the time $t = t_\infty$:	-	38,332% (3325,38 kN)	8,118 % (704,31 kN)
Sila prethodnog naprezanja N_k [kN] Prestressing force N_k [kN]		8292,71	6054,62	8675,69
Komponente sile N_k Components of N_k	N_1 [kN]	8257,187	6028,684	8638,53
	V_1 [kN]	766,753	559,817	802,163
Radijus krivine trase kablova R [m] Radius of curvature R [m]		183,47	183,47	183,47
Ekvivalentno opterećenje $q_k = \frac{N_k}{R} \left[\frac{kN}{m} \right]$ Equivalent load $q_k = \frac{N_k}{R} \left[\frac{kN}{m} \right]$		45,199	33,001	47,287

3.1.2 Slučaj B) – Ekvivalentno opterećenje računato s prosečnim padovima sile prethodnog naprezanja

3.1.2 Case B) – Equivalent load calculated with the average loss of prestressing force

Tabela 2. Ekvivalentno opterećenje za proračun po MKT, za slučaj B)
Table 2. Equivalent load for calculation with FSM, case B)

		TSG TPC		MKTVE FSMVE
		$t = t_0$	$t = t_\infty$	$t = t_0$ i $t = t_\infty$
Prosečna vrednost pada sile prethodnog naprezanja Average loss of prestressing force	trenje friction	3,531 % (313,833 kN)	-	3,531 % (313,833 kN)
	kotvljenje anchoring	3,678 % (341,481 kN)	-	3,678 % (341,481 kN)
	elastično skraćivanje elastic strains	3,063 % (274,760 kN)	-	-
	Ukupno za $t = t_0$: Total loss at the time $t = t_0$:	10,272% (903,074 kN)	10,272% (903,074 kN)	7,209 % (655,314 kN)
	relaksacije čelika, tečenje i skupljanje betona relaxation of steel, creep and shrinkage of concrete	-	17,9606% (1612,16 kN)	-
	Ukupno za $t = t_\infty$: Total loss at the time $t = t_\infty$:	-	28,233% (2542,24 kN)	7,209 % (655,314 kN)
Sila prethodnog naprezanja N_k [kN] Prestressing force N_k [kN]		8476,926	6837,76	8724,686
Komponente sile N_k Components of N_k	N_1 [kN]	8440,613	6808,469	8687,312
	V_1 [kN]	783,785	632,226	806,694
Radijus krivine trase kablova R [m]		183,47	183,47	183,47

Radius of curvature $R[m]$			
Ekvivalentno opterećenje $q_k = \frac{N_k}{R} \left[\frac{kN}{m} \right]$			
Equivalent load $q_k = \frac{N_k}{R} \left[\frac{kN}{m} \right]$	46,203	37,269	47,554

3.1.3 Tabelarni i grafički prikaz normalnih napona

U tabelama 3. i 4. prikazane su vrednosti napona dobijene primenom klasične teorije prethodno napregnutih nosača (TSG) i vrednosti napona dobijene primenom metode konačnih traka, program MKTVE, pri čemu je ekvivalentno opterećenje računato s prosečnim padovima sile prethodnog naprezanja (slučaj B):

3.1.2 Tabular and graphic representation of normal stresses

Tables 3. and 4. represent values of stress obtained according to the theory of prestressed concrete (TPC) and values of stress obtained according to the finite strip method – program FSMVE. The values of equivalent load used for these results are computed with average loss of prestressing force (case B):

Tabela 3. Vrednosti normalnih napona u vremenu $t = t_0$

Table 3. Values of normal stresses at the time $t = t_0$

čvorna linija Nodal line	prethodno naprezanje prestressing		sopstvena težina self-weight		ukupno opterećenje total load	
	TSG TPC	MKTVE FSMVE	TSG TPC	MKTVE FSMVE	TSG TPC	MKTVE FSMVE
1	-28.964	-26.667	7.890	3.850	-21.074	-22.817
2	-26.213	-24.129	6.710	3.240	-19.503	-20.889
3	-26.031	-24.044	6.630	3.230	-19.401	-20.814
4	-23.889	-21.987	5.710	2.740	-18.179	-19.247
5	-20.844	-19.182	4.400	2.080	-16.444	-17.102
6	-15.465	-14.217	2.090	0.910	-13.375	-13.307
7	-10.100	-10.479	-0.220	-0.250	-10.320	-10.729
8	-3.793	-3.548	-2.940	-1.610	-6.733	-5.158
9	2.500	2.076	-5.640	-2.970	-3.140	-0.894
10	5.545	4.875	-6.940	-3.640	-1.395	1.235

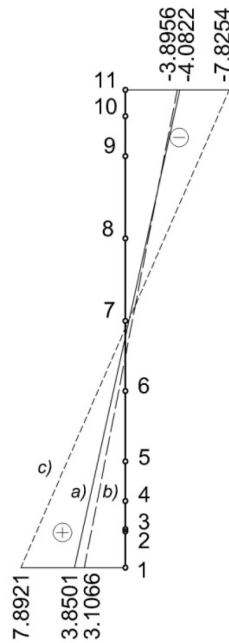
Tabela 4. Vrednosti normalnih napona u vremenu $t = t_\infty$

Table 4. Values of normal stresses at the time $t = t_\infty$

čvorna linija Nodal line	prethodno naprezanje prestressing		sopstvena težina self-weight		ukupno opterećenje total load	
	TSG TPC	MKTVE FSMVE	TSG TPC	MKTVE FSMVE	TSG TPC	MKTVE FSMVE
1	-23.363	-21.249	7.890	3.110	-15.473	-18.139
2	-21.145	-19.221	6.710	2.570	-14.435	-16.651
3	-20.997	-19.169	6.630	2.550	-14.367	-16.619
4	-19.270	-18.092	5.710	2.130	-13.560	-15.962
5	-16.814	-15.271	4.400	1.540	-12.414	-13.731
6	-12.475	-11.306	2.090	0.510	-10.385	-10.796
7	-8.147	-8.570	-0.220	-0.510	-8.367	-9.080
8	-3.060	-2.801	-2.940	-1.710	-6.000	-4.511
9	2.017	1.657	-5.640	-2.920	-3.624	-1.263
10	4.473	3.891	-6.940	-3.500	-2.467	0.391

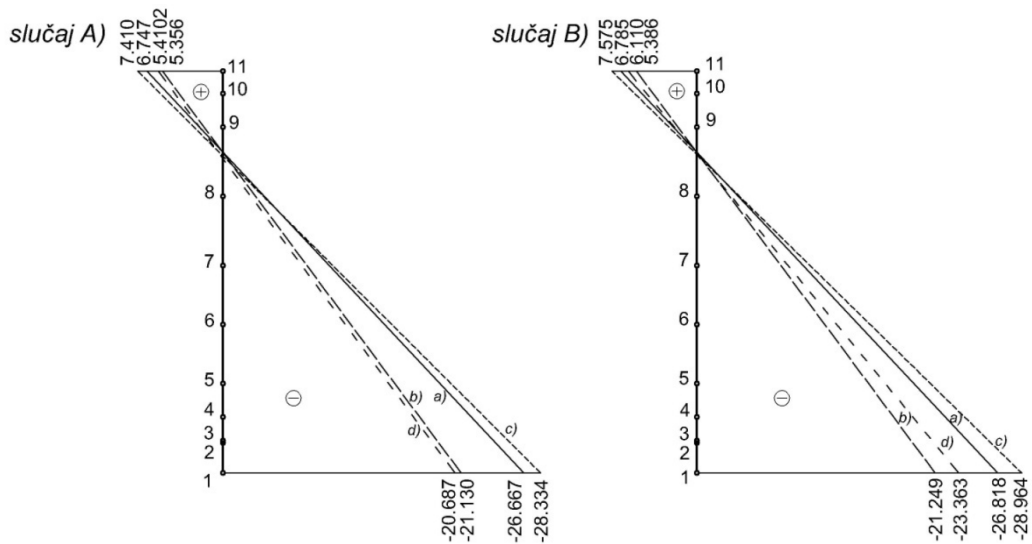
Dobijene vrednosti grafički su predstavljene na sledećim slikama:

In the following Figures, the results of stresses calculated in the middle of the span length are shown.



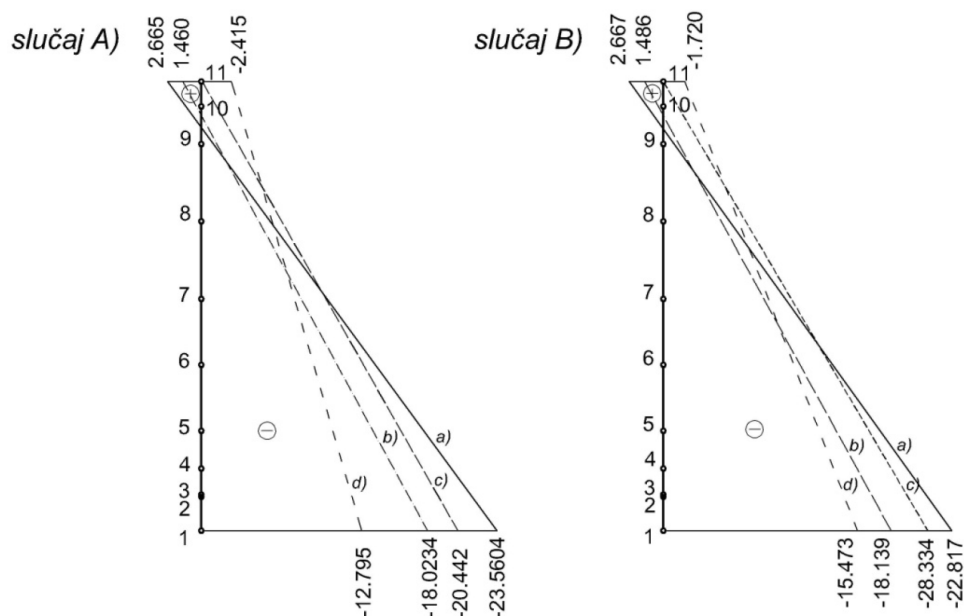
Sl. 12. Dijagram napona σ_y [MPa] usled sopstvene težine nosača a) prema MKT u vremenu $t = t_0$; b) prema MKT u vremenu $t = t_\infty$; c) prema TSG

Figure 12. Distribution of stress σ_y [MPa] for self-weight a) according to the FSMVE at the time $t = t_0$, b) according to the FSMVE at the time $t = t_\infty$, c) according to the TPC



Sl. 13. Dijagrami napona σ_y [MPa] usled sile prethodnog napreznja: a) prema MKT u vremenu $t = t_0$; b) prema MKT u vremenu $t = t_\infty$; c) prema TSG u $t = t_0$; d) prema TSG u $t = t_\infty$

Figure 13. Distribution of stress σ_y [MPa] due to force in the tendon: a) according to the FSMVE at the time $t = t_0$, b) according to the FSMVE at the time $t = t_\infty$, c) according to the TPC at the time $t = t_0$, d) according to the TPC at the time $t = t_\infty$



Sl. 14. Dijagrami napona σ_y [MPa] za ukupno opterećenje: a) prema MKT u vremenu $t = t_0$; b) prema MKT u vremenu $t = t_\infty$; c) prema TSG u $t = t_0$; d) prema TSG u $t = t_\infty$.

Figure 14. Distribution of stress σ_y [MPa] for total loading: a) according to the FSMVE at the time $t = t_0$, b) according to the FSMVE at the time $t = t_\infty$, c) according to the TPC at the time $t = t_0$, d) according to the TPC at the time $t = t_\infty$.

Padovi sile prethodnog naprezanja, dobijeni primenom klasične teorije savijanja grednih nosača i primenom metode konačnih traka za slučaj A i slučaj B, upoređeni su u tabeli 5:

Table 5. presents comparison of loss of prestressing force obtained according to the TPC and according to the FSMVE for case A) and B):

Tabela 5. Pad sile prethodnog naprezanja
Table 5. Loss of prestressing force

		TSG TPC	MKT A) FMSVE A)	MKT B) FMSVE B)
Pad sile prethodnog naprezanja Loss of prestressing force	trenje friction	8,118 % (704,31 kN)	8,118 % (704,31 kN)	8,118 % (704,31 kN)
	kotvljenje anchoring	0	0	0
	elastično skraćenje elastic strains	4,414 % (382,98 kN)	9,373 % (813,108 kN)	9,4336 % (818,43 kN)
	Ukupno za $t = t_0$: Total loss at the time $t = t_0$:	12,532% (1087,29 kN)	17,491% (1517,418 kN)	17,5516 % (1522,74 kN)
	relaksacije čelika, tečenje i skupljanje betona relaxation of steel, creep and shrinkage of concrete	25,800 % (2382,09 kN)	31,8615 % (2763,985 kN)	31,859 % (2763,985 kN)
	Ukupno za $t = t_\infty$: Total loss at the time $t = t_\infty$:	38,332% (3325,38 kN)	39,9795 % (3468,295 kN)	39,977 % (3468,281 kN)

3.1.4 Diskusija rezultata

Analizirajući rezultate dobijene klasičnom teorijom savijanja grede i primenom metode konačnih traka, dobijamo da klasična teorija daje manje gubitke sile prethodnog napreznja u vremenu $t = t_0$, zato što je u klasičnoj teoriji gubitak usled elastičnog skraćenja nešto manji.

U vremenu $t = t_\infty$ gubitak sile prethodnog napreznja dobijen klasičnom teorijom savijanja grede i primenom metode konačnih traka skoro je izjednačen, razlika je 1,645%, što je zanemarljivo. Prema tome, sledi da se u klasičnoj teoriji, pošto se zasebno računa pad usled elastičnog skraćenja i pad usled tečenja, skupljanja betona i relaksacije čelika, dobija dosta veći pad usled tečenja, skupljanja betona i relaksacije čelika nego metodom konačnih traka, gde su ti padovi povezani.

3.2 Primer 2 – proračun prethodno napregnutog nosača sandučastog preseka

Na slici 15. date su osnovne dispozicione karakteristike prethodno napregnutog nosača sandučastog poprečnog preseka:

3.1.4 Results discussion

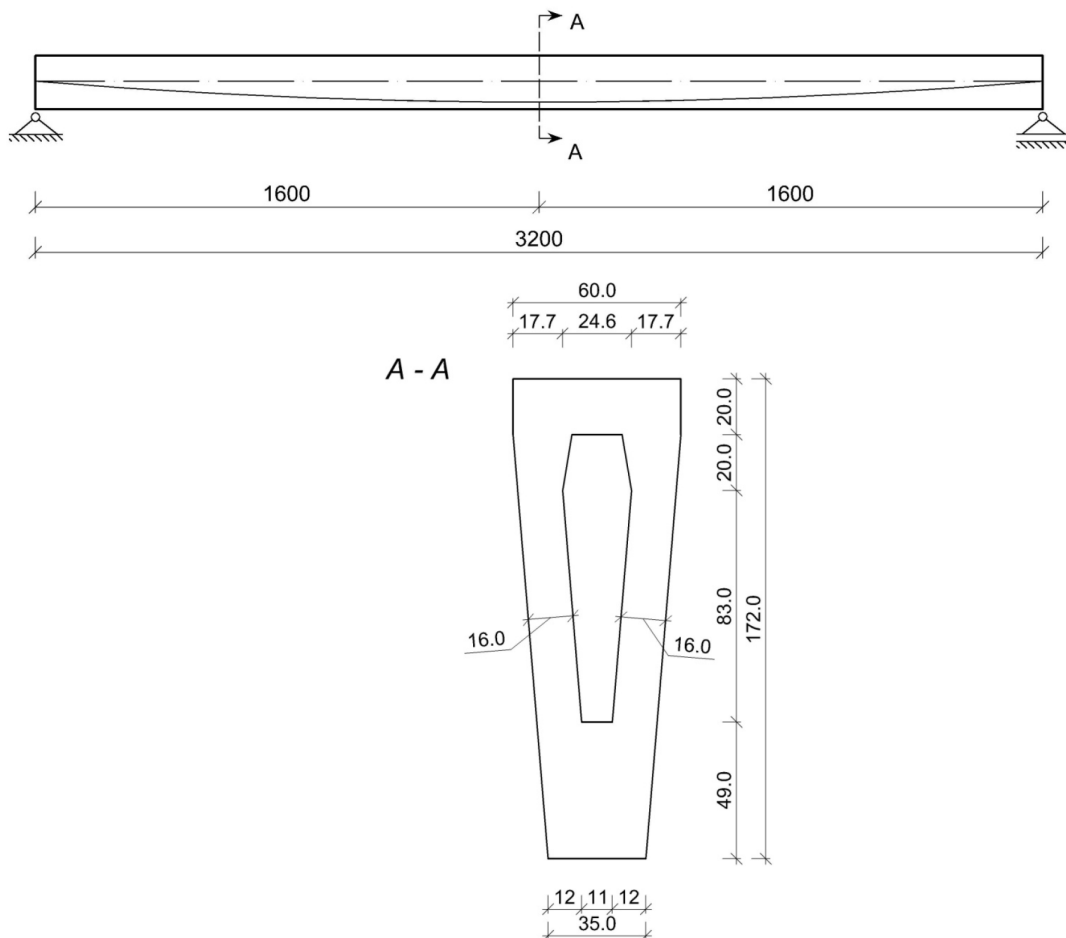
Analyzing the results obtained from TPC, and to the FSMVE, we find that TPC gives smaller loss of prestressing force at the time $t = t_0$, because in TPC the loss of prestressing force due to elastic strains is less.

At the time $t = t_\infty$ the loss of prestressing force obtained by TPC and by FSMVE is nearly equal. The difference is 1.645%, which is negligible. Hence, in the theory of prestressed concrete where the loss of prestressing force is calculated separately due to elastic strains and due to creep and shrinkage of concrete and relaxation of steel, we obtain much bigger loss of prestressing force due to creep and shrinkage of concrete and relaxation of steel than with the finite strip method - program FSMVE, where those losses are related.

3.2 Example 2 – computation of a prestressed girder with box - section

This example presents comparative analysis of calculations of a prestressed concrete girder according to the theory of prestressed concrete, and to the FSMVE.

Figure 15. provides basic dispositional characteristics of prestressed girder with box cross-section:



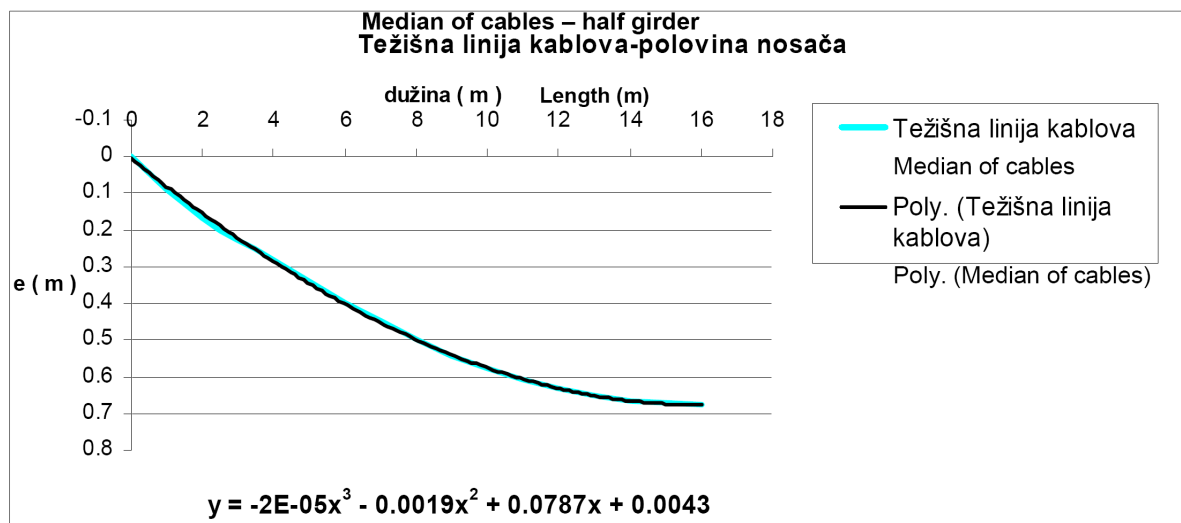
Sl. 15. Osnovne dispozicione karakteristike nosača potrebne za proračun
Figure 15. Basic disposition characteristics of the girder which are required for computation

Predviđeno je da se nosač uteže sa po šest kablova 6Ø15.2, s početnom silom prethodnog napreznja $N^0 = 6204$ kN. Međutim, radi pojednostavljenja postupka proračuna, za usvojenu trasu kablova uzeta je težišna linija kablova, koja duž nosača ima oblik polinoma trećeg reda.

Sa „e” označeno je rastojanje težišne linije kablova i težišta poprečnog preseka (slika 16):

It is provided that the girder is prestressed with 6 tendons 6Ø15.2, with the initial prestressing force $N^0 = 6204$ kN. However, in order to simplify the calculation procedure, for the applied cable route was taken median line of the tendons, which along the girder has a form of a polynomial of the third order.

With an „e” is marked distance line cables gravity and cross section gravity (Fig. 16):



Sl. 16. Težišna linija kablova za polovinu nosača
Figure 16. Median line of cables for half length of girder

Karakteristike betona - kao viskoelastičnog materijala – jesu:

$$E_b = E_0 = E_{28} = 3400 \text{ kN} / \text{cm}^2,$$

$$\text{koeficijent tečenja} - j(t_\infty, t_0) = 2.552,$$

$$\text{koeficijent starenja} - c(t_\infty, t_0) = 0.75,$$

odakle su parametri:

$$k_1 = 1 + \frac{E_0}{E_{28}} \cdot j = 3.552,$$

$$k_2 = 1 + c \cdot j = 2.914.$$

Modul elastičnosti prethodno napregnutih kablova jeste

$$E_k = 19500 \text{ kN} / \text{cm}^2,$$

dok je Poisson-ov koeficijent

$$n = 0.$$

Odavde sledi da je odnos modula elastičnosti čelika i betona

$$n = \frac{E_k}{E_b} = 5.74.$$

Na slici 17. prikazan je raspored čvornih linija i konačnih traka unutar poprečnog preseka u usvojenom koordinatnom sistemu. Pri proračunu je uzeta u obzir simetrija poprečnog preseka. Korištena je konačna traka pločastog nosača s četiri stepena slobode po čvornoj liniji, kao i u prethodnom primeru. Poprečni presek diskretizovan je sa deset konačnih traka.

The characteristics of concrete as viscoelastic material are:

$$E_b = E_0 = E_{28} = 3400 \text{ kN} / \text{cm}^2,$$

the final value of creep coefficient:

$$j(t_\infty, t_0) = 2.552,$$

ageing coefficient: $c(t_\infty, t_0) = 0.75$,

and the following parameters yield:

$$k_1 = 1 + \frac{E_0}{E_{28}} \cdot j = 3.552,$$

$$k_2 = 1 + c \cdot j = 2.914.$$

The modulus of elasticity and Poisson's coefficient of prestressing tendon is:

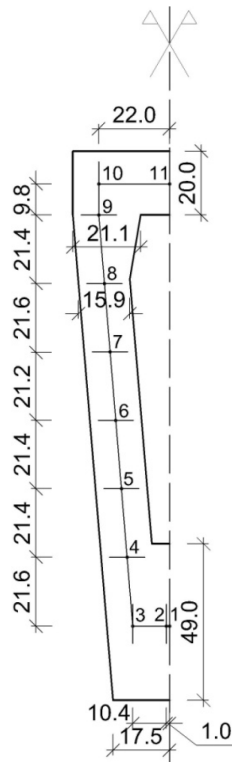
$$E_k = 19500 \text{ kN} / \text{cm}^2,$$

$$n = 0,$$

and following ratio of modulus of elasticity of steel and concrete yields:

$$n = \frac{E_k}{E_b} = 5.74.$$

Figure 17. presents the distribution of nodal points and the finite strip mesh within the cross section. The calculation takes into account the symmetry of the cross-section. Flat shell finite strip with four degrees of freedom per nodal line was used as in the previous example. Cross-section is discretized with 10 finite strips.



Sl. 17. Mreža konačnih traka sa oznakama čvornih linija
Figure 17. Girder mesh of finite strips with marking nodal lines

Uslovi simetrije:

$$u_1 = 0 \text{ i } u_{11} = 0,$$

$$j_1 = 0 \text{ i } j_{11} = 0.$$

Na osnovu Klasične teorije savijanja greda, dobijeni padovi sile prethodnog napreznjanja za poprečni presek u preseku A – A prikazani su u tabeli 6.

Symmetry conditions are:

$$u_1 = 0 \text{ and } u_{11} = 0,$$

$$j_1 = 0 \text{ and } j_{11} = 0.$$

Based on the TPC, obtained loss of prestressing force for cross-section A – A are shown in Table 6.

Tabela 6. Pad sile prethodnog napreznjanja
Table 6. Loss of prestressing force

	Trenje Friction	Elastične deformacije Elastic strains	Skupljanje, tečenje i relaksacija Relaxation of steel, creep and shrinkage of concrete	Rekapitulacija Recap
ΔN (%)	2.5	4.67	14.32	21.49
ΔN (kN)	151.38	282.89	722.85	1157.12

Za padove sile prethodnog napreznjanja, za poprečni presek A – A, sračunati metodom konačnih traka, dobijeni su sledeći rezultati:

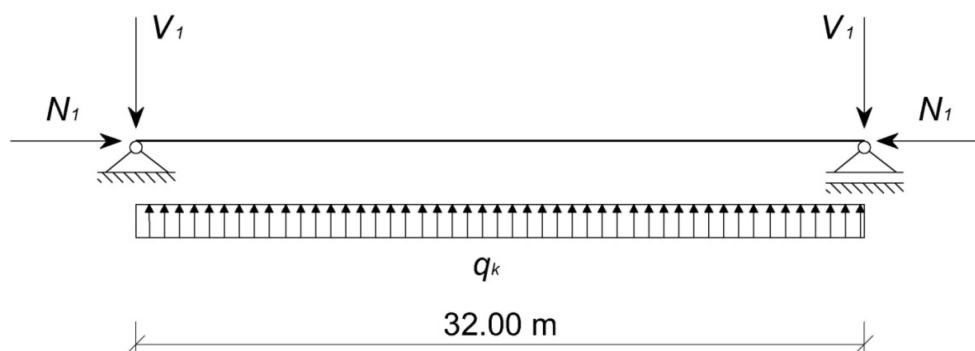
3.2.1 Slučaj A) – Ekvivalentno opterećenje računato s padovima sile prethodnog napreznjanja za presek na sredini raspona:

Za proračun ekvivalentnog opterećenja ukupna sila prethodnog napreznjanja umanjena je za vrednost pada sile prethodnog napreznjanja usled trenja i kotvljenja za presek na sredini raspona:

For the loss of prestressing force, for the cross-section A – A, calculated with the finite strip method – program FSMVE, the following results are obtained:

3.2.1 Case A) – Equivalent load calculated with loss of prestressing force for the cross-section in the middle of the span length:

For the calculation of the equivalent load, total force is lower for the value of loss of prestressing force caused by friction and anchoring of cross-section:



Sl. 18. Sila prethodnog naprezanja i ekvivalentno opterećenje
Figure 18. Prestressing force and equivalent load

Tabela 7. Vrednost pada sile prethodnog naprezanja, sila prethodnog naprezanja i ekvivalentnih opterećenja za MKTVE, za slučaj A)

Table 7. The value of loss of prestressing force, prestressing force and equivalent load for FSMVE, case A)

		MKTVE FSMVE	
		$t = t_0$	$t = t_\infty$
Pad sile prethodnog naprezanja Loss of prestressing force	trenje friction	2,5%	2,5%
	kotvljenje anchoring	0	0
	elastično skraćenje elastic strains	3,91%	-
	Ukupno za $t = t_0$: Total loss at the time $t = t_0$:	6,41%	-
	elastično skraćenje sa skupljanjem i tečenjem betona i relaksacijom čelika elastic strains with relaxation of steel, creep and shrinkage of concrete	-	20,67%
	Ukupno za $t = t_\infty$: Total loss at the time $t = t_\infty$:	-	23,17%
Komponente sile N_k Components of N_k	$N_1 [kN]$	6052,62	6052,62
	$V_1 [kN]$	508,42	508,42
Ekvivalentno opterećenje $q_k \left[\frac{kN}{m} \right]$ Equivalent load $q_k \left[\frac{kN}{m} \right]$		31,94	31,94

3.2.2 Slučaj B) – Ekvivalentno opterećenje računato s prosečnim padovima sile prethodnog naprezanja

Za proračun ekvivalentnog opterećenja ukupna sila prethodnog naprezanja umanjena je za prosečnu vrednost pada sile prethodnog naprezanja usled trenja i kotvljenja:

3.2.2 Case B) – Equivalent load calculated with the average loss of prestressing force

For the calculation of the equivalent load, total prestressing force is lower for the value of average loss of prestressing force caused by friction and anchoring:

Tabela 8. Prosečna vrednost pada prethodnog naprezanja, sile prethodnog naprezanja i ekvivalentna opterećenja za MKTVE, za slučaj B)

Table 8. The value of average loss of prestressing force, prestressing force and equivalent load for FSMVE, case B)

		MKTVE FSMVE	
		$t = t_0$	$t = t_\infty$
Pad sile prethodnog naprezanja Loss of prestressing force	trenje friction	2,30%	2,30%
	kotvljenje anchoring	0,99%	0,99%
	elastično skraćanje elastic strains	3,85%	-
	Ukupno za $t = t_0$: Total loss at the time $t = t_0$:	7,14%	-
	elastično skraćanje sa skupljanjem i tečenjem betona i relaksacijom čelika elastic strains with relaxation of steel, creep and shrinkage of concrete	-	20,72%
	Ukupno za $t = t_\infty$: Total loss at the time $t = t_\infty$:	-	24,01%
Komponente sile N_k Components of N_k	$N_1 [kN]$	6005,66	6005,66
	$V_1 [kN]$	504,47	504,47
Ekvivalentno opterećenje $q_k \left[\frac{kN}{m} \right]$ Equivalent load $q_k \left[\frac{kN}{m} \right]$		31,69	31,69

Padovi sile prethodnog naprezanja, dobijeni primenom klasične teorije savijanja grednih nosača i primenom metode konačnih traka za slučaj A i slučaj B, upoređeni su u tabeli 9:

The loss of prestressing force obtained by TPC and FSMVE for Case A and Case B are compared in Table 9:

Tabela 9. Pad sile prethodnog naprezanja
Table 9. Loss of prestressing force

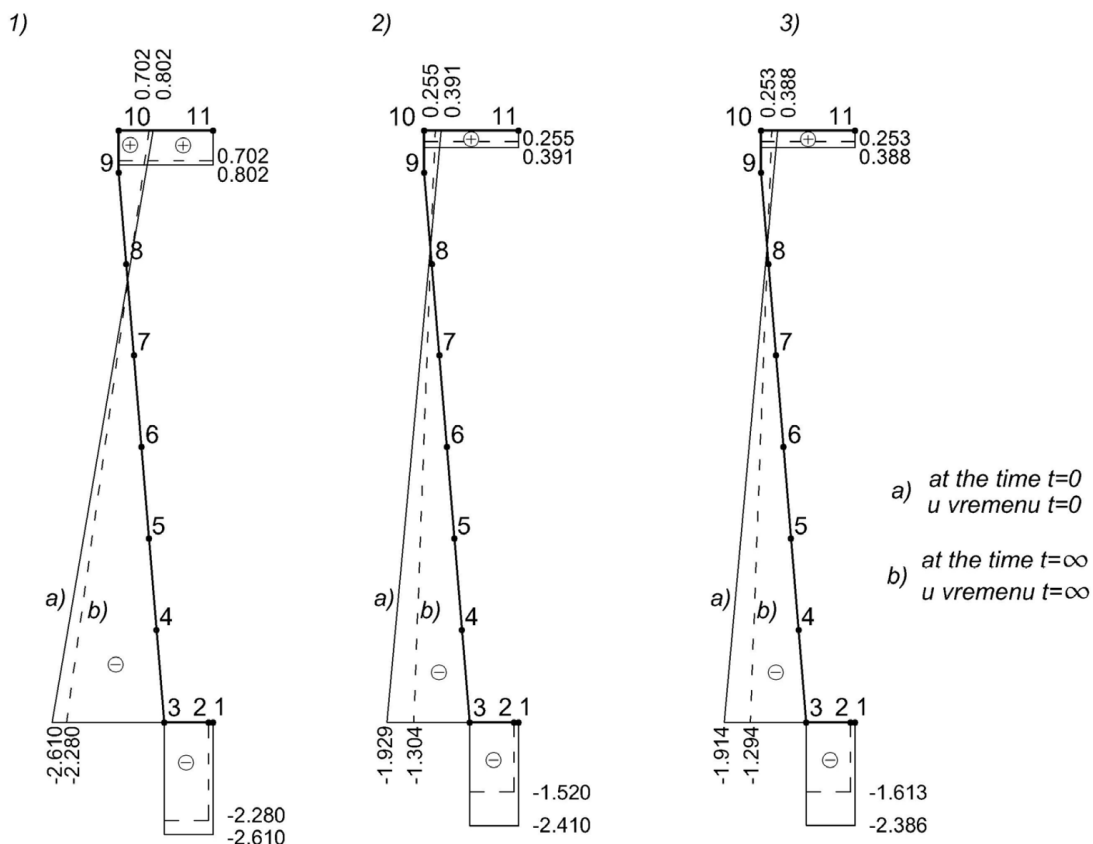
	TSG TPC	MKTVE A) FSMVE A)	MKTVE B) FSMVE B)
Pad sile u $t = t_0$ Loss of prestressing force at the time $t = t_0$	7,17 %	6,41 %	7,14 %
Pad sile u $t = t_\infty$ Loss of prestressing force at the time $t = t_\infty$	21,49 %	23,17 %	24,01 %

3.2.3 Tabelarni i grafički prikaz normalnih napona

Analizirani rezultati grafički predstavljeni su na narednim slikama:

3.2.3 Tabular and graphical presentation of normal stresses

Obtained results are shown on the next figures:



Sl. 19. Dijagrami napona σ_y [MPa] usled sile prethodnog napreznja 1) – rezultati po TSG slučaj A); 2) – rezultati po MKT slučaj A); 3) – rezultati po MKT slučaj B)

Figure 19. Distribution of stress σ_y [MPa] due to force in the tendon: 1) –according to the TPC case A); 2) – according to the FSMVE case A); 3) – according to the FSMVE case B

U tabelama 10. i 11. prikazane su vrednosti napona σ_y [MPa] usled prethodnog napreznja, sopstvene težine i ukupnog opterećenja, date za vreme $t = t_0$ i $t = t_\infty$:

Tables 10 and 11 shows stress values σ_y [MPa] due to prestressing, self-weight and total load, given at the time $t = t_0$ and at the time $t = t_\infty$:

Tabela 10. Vrednosti normalnih napona u vremenu $t = t_0$

Table 10. Values of normal stresses at the time $t = t_0$:

čvorna linija Nodal line	prethodno napreznje prestressing		sopstvena težina self-weight		ukupno opterećenje total load	
	TSG TPC	MKTVE FSMVE	TSG TPC	MKTVE FSMVE	TSG TPC	MKTVE FSMVE
1	-2.61	-2.41	1.72	1.58	-0.89	-0.83
2	-2.61	-2.41	1.72	1.58	-0.89	-0.83
3	-2.61	-1.93	1.72	1.11	-0.89	-0.82
4	-2.07	-1.55	1.21	0.73	-0.86	-0.82
5	-1.55	-1.15	0.71	-1.34	-0.84	-2.49
6	-1.02	-0.63	0.20	-0.11	-0.82	-0.74
7	-0.49	-0.36	-0.30	-0.44	-0.79	-0.80
8	0.03	0.05	-0.81	-0.86	-0.77	-0.81
9	0.69	0.39	-1.31	-1.19	-0.62	-0.80
10	0.80	0.39	-1.62	-1.18	-0.82	-0.79
11	0.80	0.39	-1.62	-1.16	-0.82	-0.77

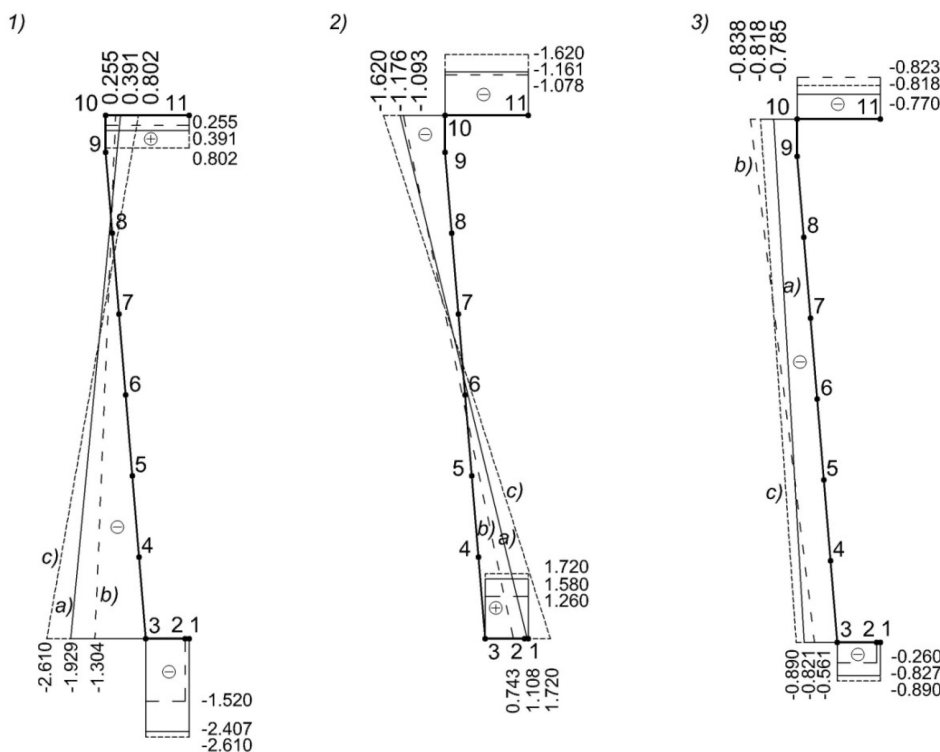
Tabela 11. Vrednosti normalnih napona u vremenu $t = t_{\infty}$

Table 11. Values of normal stresses at the time $t = t_{\infty}$:

čvorna linija Nodal line	prethodno naprezanje prestressing		sopstvena težina self-weight		ukupno opterećenje total load	
	TSG	MKTVE FSMVE	TSG	MKTVE FSMVE	TSG	MKTVE FSMVE
	TPC		TPC		TPC	
1	-2.28	-1.52	2.22	1.26	-0.06	-0.26
2	-2.28	-1.61	2.22	1.12	-0.06	-0.49
3	-2.28	-1.30	2.22	0.74	-0.06	-0.56
4	-1.76	-1.05	1.56	0.44	-0.20	-0.61
5	-1.29	-0.78	0.91	0.12	-0.39	-0.66
6	-0.83	-0.41	0.25	-0.24	-0.58	-0.64
7	-0.36	-0.25	-0.40	-0.50	-0.76	-0.75
8	0.10	0.02	-1.06	-0.84	-0.95	-0.81
9	0.57	0.25	-1.71	-1.10	-1.14	-0.85
10	0.70	0.26	-2.09	-1.09	-1.39	-0.84
11	0.70	0.26	-2.09	-1.08	-1.39	-0.82

Raspored napona za prethodno naprezanje, sopstvenu težinu i ukupno opterećenje dat je na sledećim slikama:

Stress distribution for prestressing, self-weight and total load are shown on next figure:



Sl. 20. Dijagrami napona σ_y [MPa] za slučaj A: 1) usled sile prethodno naprezanja; 2) usled sopstvene težine; 3) za ukupno opterećenje; a) prema MKT u vremenu $t = t_0$; b) prema MKT u vremenu $t = t_{\infty}$; c) prema TSG u vremenu $t = t_0$

Figure 20. Distribution of stress σ_y [MPa] for case A : 1) due to prestressing force; 2) due to self-weight; 3) for total load, a) according to the FSMVE at the time $t = t_0$, b) according to the FSMVE at the time $t = t_{\infty}$, c) according to the TPC at the time $t = t_0$

3.2.4 Diskusija rezultata

Pad sile prethodnog naprezanja, sračunat metodom konačnih traka u vreme $t = t_0$, odgovara padu koji se u *Teoriji prethodno napregnutog betona* naziva pad sile prethodnog naprezanja usled elastičnih deformacija betona. Da bismo u proračunu imali u vidu i ostale padove sile prethodnog naprezanja (trenje i kotvljenje), njih smo zadali u sklopu ekvivalentnog opterećenja, i to tako što smo umanjili početnu silu prethodnog naprezanja za te padove. Upoređivanjem rezultata, možemo zaključiti da pad sile prethodnog naprezanja dobijen Klasičnom teorijom savijanja greda (7.17%) odgovara padu sile prethodnog naprezanja dobijenom metodom konačnih traka za slučaj B), odnosno kada je u proračunu unesen prosečan pad usled trenja i kotvljenja kablova. (7.14%). Za slučaj A), odnosno kada je u proračunu uzet u obzir pad sile prethodnog naprezanja usled trenja i kotvljenja za presek na sredini raspona, metod konačnih traka daje manji pad sile u vremenu $t = t_0$ (6.41%).

Trajna sila prethodnog naprezanja, dobijena Klasičnom teorijom savijanja greda, za 21.49% je manja od početne sile, dok je ukupan pad sile prethodnog naprezanja, dobijen metodom konačnih traka 23.17% (za slučaj A)), odnosno 24.01% (za slučaj B)).

Naposletku, možemo zaključiti da program MKTVE, u slučaju ovog primera, daje veći pad sile prethodnog naprezanja nego Klasična teorija savijanja greda – razlika je ~ 2.00 %.

4 ZAKLJUČAK

Viskoelastični metod konačnih traka prezentovan je u proračunu prethodno napregnutih betonskih grednih nosača. Metod konačnih traka pretstavlja kombinaciju ravnog stanja napona i Kirchhoff-ve teorije savijanja ploča gdje su matrice krutosti i vektori opterećenja izraženi analitički kao funkcija amplituda čvornih pomeranja. Kompleksni matematički izrazi programirani su u okviru računarskog jezika *Fortran*. Interfejs programa realizovan je programskim jezikom *Delphi* u razvojnom okruženju *CodeGear RAD Studio 2009*. Imajući u vidu da je metod konačnih traka poluanalitički i polunumerički metod, u teoriji poliedarskih ljuski, on je veoma povoljan za rešavanje problema pločastih nosača u poređenju s proračunom prema teoriji prethodno napregnutog betona.

3.2.4 Results discussion

Loss of prestressing force calculated with the finite strip method – program FSMVE at the time $t = t_0$ corresponds to that which is known in TPC as "loss of prestressing force caused by elastic strains of concrete". In order to take into account other losses of prestressing force (friction and anchoring), we have struck them as part of an equivalent load, and so we reduce the initial prestressing force for that loss. Comparing the results, we conclude that loss of prestressing force, obtained by the CPT (7.17%) corresponds to a loss of prestressing force obtained by FSMVE computer program for case B), when we included in calculation the average loss of prestressing force caused by friction and anchoring of the tendons (7.14%). In case A) when in calculation is considered loss of prestressing force caused by friction and anchoring for cross-section, the computer program FSMVE gives a lower loss of prestressing force at the time $t = t_0$ (6.41%).

Permanent prestressing force, obtained by CPT is for 21.49 % less than the initial force, while the overall loss of prestressing force obtained by FSMVE computer program is 23.17 % (in case A)), and 24.01 % (in case B)).

Finally we can conclude that, in the case of this example, the finite strip method – program FSMVE provides a greater loss of prestressing force than TPC, the difference is ~ 2.00 %.

4 CONCLUSION

The viscoelastic finite strip method has been presented for use in the design of prestressed concrete girders. Finite strip method represents a combination of plane stress and Kirchhoff's theory of bending plates where the stiffness matrices and loading vectors are expressed analytically as a function of the nodal displacement amplitudes. Complex mathematical expressions were programmed within the frame of the FORTRAN programming language. The interface of the program was implemented in the *Delphi* programming language using *Code Gear RAD Studio 2009* development environment. Bearing in mind that the finite strip method is a semi-analytical and semi-numerical method, in the theory of polyhedral shells, we find it very favourable in solving of the folded plate structures problem in comparison with the calculation according to the theory of prestressed concrete.

5 LITERATURA REFERENCES

- [1] Timošenko, S. and Gudier, J.H.: Theory of elasticity, GK (translate from English into Serbo-Croatian), Beograd, 1962.
- [2] Reiner, M.: Rhéologie théorique, Dunod, Paris, 1955.
- [3] Bažant, Z.P. and Kim, J.-K.: Improved prediction model for time-dependent Deformations of concrete: Part 5-Cyclic load and cyclic humidity, Materials and Structures 25, 1992, 163-169.
- [4] Hirst, G. A. and Neville, A.M.: Activation energy of creep of concrete under short-term static and cyclic stresses, Magazin of concrete research 29, 1998, 13-18.
- [5] Milašinić, D. D.: Rheological-dynamical analogy: modeling of fatigue behaviour, International Journal of Solids and Structures 40(1), 2003, 181-217.
- [6] [Cumbo, A. and Folić, R.: Prilog analizi uticaja tečenja i skupljanja betona kod spregnutih konstrukcija primenom metode konačnih elemenata (in Serbian), Građevinski materijali i konstrukcije 43(1-2), 2000, 12-19.
- [7] Milašinić, D. D.: The Finite Strip Method in Computational Mechanics, Faculties of Civil Engineering: University of Novi Sad, Technical University of Budapest and University of Belgrade: Subotica, Budapest, Belgrade, 1997.
- [8] Alendar, V. and Perišić, Ž.: Prethodno napregnuti beton – primeri za vežbe, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 1984.
- [9] Pejović, R.: Prethodno napregnuti beton, Univerzitet Crne Gore, 1999.
- [10] Jeftić, D.: Prednapregnuti beton, Građevinska knjiga, Beograd, 1986.

REZIME

VISKOELASTIČNA ANALIZA PRETHODNO NAPREGNUTIH BETONSKIH GREDNIH NOSAČA METODOM KONAČNIH TRAKA

*Dragan D. MILAŠINOVIĆ
Mila SVILAR
Nataša MRĐA
Laura TUZA
Branislav NOVKOV
Ljubomir MILAŠINOVIĆ*

Metod konačnih traka uspešno je uveden u studiju viskoelastičnog ponašanja prethodno napregnutih betonskih grednih nosača. Razlog za uvođenje ovog metoda jeste to što je on u rešavanju nekoliko tipova praktičnih problema mnogo brži pri rešavanju od mnogo obuhvatnijeg i prilagodljivijeg metoda konačnih elemenata. Ovo generalno važi za konstrukcije s pravilnom geometrijom i jednostavnim graničnim uslovima, čija je diskretizacija u mnogo konačnih elemenata često vrlo skupa. U takvim slučajevima, metod konačnih traka može biti veoma konkurentan u pogledu troškova i tačnosti, kako tokom proračuna, tako i u praktičnoj primeni. Diskretizacija poprečnog preseka u mrežu od samo nekoliko konačnih traka omogućava rešavanje složenih konstrukcijskih problema.

Ključne reči: metod konačnih traka; viskoelastična analiza; prethodno napregnuti betonski gredni nosači.

SUMMARY

VISCOELASTIC ANALYSIS OF PRESTRESSED CONCRETE GIRDERS BY THE FINITE STRIP METHOD

*Dragan D. MILASINOVIC
Mila SVILAR
Nataša MRDJA
Laura TUZA
Branislav NOVKOV
Ljubomir MILASINOVIC*

The finite strip method has successfully introduced in the study of viscoelastic behaviour of prestressed concrete girders. The reason for the introduction of this method lies in the fact that resolving of several classes of practical problems it is much faster than the more comprehensive and adaptable finite element method. This is generally valid for structures with regular geometrical shape and simple boundary conditions, whose discretization into many finite elements is often very expensive. In such cases the finite strip method can be extremely competitive in terms of cost and accuracy, both during computations and in practical application. Discretization of the cross-section into a mesh of only several finite strips enables the solution of complex structural problems.

Keywords: Finite strip method, viscoelastic analysis, prestressed concrete girders

UTICAJ DODATKA RECIKLIRANE GUME I RECIKLIRANOG STAKLA NA PROMENU BRZINE ULTRAZVUKA U BETONU

EFFECTS OF ADDITION OF RECYCLED RUBBER AND RECYCLED GLASS ON THE VARIATIONS OF ULTRASONIC VELOCITY IN CONCRETE

Dušan GRDIĆ
Nenad RISTIĆ
Gordana TOPLIČIĆ ČURČIĆ

ORIGINALNI NAUČNI RAD
ORIGINAL SCIENTIFIC PAPER
UDK: 666.972.16:628.477.043 = 861

1 UVOD

Tehnolozi betona već decenijama su zainteresovani za istraživanje svojstava betona nedestruktivnim metodama. Tako, na primer, primena vibracionih metoda u istraživanju svojstava betona datira s početka tridesetih godina prošlog veka. Pionirima u toj oblasti smatraju se Pauers [11], Obert [9], Hornbruk [4] i Tomson [18] (citirano prema [8]). Od tada do danas, razvijene su brojne nedestruktivne metode i mnogi odgovarajući meri instrumenti.

Metoda ultrazvuka uspešno se koristi za procenu kvaliteta betona više od šezdeset godina [8]. Razvoj ultrazvučne metode počeo je najpre u Kanadi i u Engleskoj, skoro u isto vreme, posmatrano s današnje vremenske distance. Kanadski istraživači Lesli i Čizmen razvili su instrument „soniskop” [7], dok je Džons u Engleskoj razvio instrument koji je nazvao ultrazvučni aparat koji se samo u nekim detaljima razlikovao od kanadskog aparata [5] (citirano prema [8]). Nakon izvesnog perioda razvoja ultrazvučnih aparata i sprovedenih eksperimenata u laboratorijskim uslovima, šezdesetih godina XX veka, ultrazvučna metoda počinje da se koristi i na terenu [8]. Ubrzo je metoda ultrazvuka za ispitivanje betona standardizovana i prihvaćena u mnogim zemljama. U Srbiji je to učinjeno preko standarda SRPS U.M1.042:1998 i SRPS EN 12504-4:2008. Autori iz Srbije su takođe radili istraživanja u oblasti primene

Dušan Grdić, MSc, student doktorskih studija, Građevinsko-arhitektonski fakultet Univerziteta u Nišu, dusan.grdic@hotmail.rs
Nenad Ristić, asistent, Građevinsko-arhitektonski fakultet Univerziteta u Nišu, nenad.ristic@gaf.ni.ac.rs
Gordana Topličić-Čurčić, docent, Građevinsko-arhitektonski fakultet Univerziteta u Nišu, gordana.toplicic.curcic@gaf.ni.ac.rs

1 INTRODUCTION

Concrete technologists have been interested in research of the concrete properties for decades. Thus, for instance, implementation of vibration methods in research of concrete properties dates back to the early 30's of the previous century. Those who are considered the pioneers in this field are Powers [11], Obert [9], Hornbrook [4] and Thomson [18], cited by [8]. Since then a large number of non-destructive methods and corresponding measuring instruments have been developed.

The ultrasonic method has been successfully used for evaluation of concrete quality for more than 60 years [8]. The development of ultrasonic method started at first in Canada and England, almost at the same time, from today's perspective. The Canadian researchers, Leslie and Cheesman developed the “soniscope” instrument [7], while in England, Jones developed an instrument he called the ultrasonic device, which was different from the Canadian apparatus only in some details [5], cited by [8]. After a certain period of development of ultrasound devices and experiments conducted in laboratory conditions, at some point in the 60's the ultrasound method started to be used in the field [8]. Very soon, the ultrasound method for concrete testing was standardized and accepted in a large number of countries. In Serbia, it was accomplished through the standards SRPS

Dusan Grdic, MSc, University of Nis, Faculty of Civil Engineering and Architecture, PhD student, dusan.grdic@hotmail.rs
Nenad Ristic, University of Nis, Faculty of Civil Engineering and Architecture, assistant lecturer, nenad.ristic@gaf.ni.ac.rs
Gordana Toplicic-Curcic, University of Nis, Faculty of Civil Engineering and Architecture, assistant professor, gordana.toplicic.curcic@gaf.ni.ac.rs

ultrazvuka za karakterizaciju betona, na primer, u radovima [1], [3], [17].

2 FAKTORI KOJI UTIČU NA BRZINU ULTRAZVUKA

Sprovođenje samog testiranja betona metodom ultrazvuka prilično je jednostavno. Međutim, brojna ispitivanja pokazala su da može biti problema s reproduktivnošću rezultata, jer mnogi faktori utiču na njihovu vrednost. U nastavku teksta navedeni su najznačajniji od njih.

Prilikom merenja, veoma je važno da se ostvari pravilan kontakt između sonde ultrazvučnog aparata i ispitne površine betona. Površina betona na mestu postavljanja sonde mora biti premazana tankim slojem masti u koju se sonda utiskuje tako da ne bude zaostalih mehurića vazduha. Ukoliko je površina betona hrapava, neophodno je da se poravna. Rilem takođe propisuje minimalno dozvoljeno rastojanje sonde ultrazvučnog aparata i to 100 mm – ako je beton spravljen s najvećim zrnom agregata, do 30 mm, odnosno 150 mm – ako je najveće zrno agregata do 45 mm [15].

U najvećem broju slučajeva ispitivanja, betonska tela ili konstruktivni elementi imaju dimenzije koje ne utiču na regularnost merenja. Međutim, treba voditi računa kada su bočne dimenzije betonskih tela znatno manje u odnosu na treću dimenziju, odnosno na dužinu puta koji treba da pređe ultrazvučni talas. Na primer, ako je izmerena brzina ultrazvuka u betonu od oko 3700 m/s i ako sonda predajnik ima frekvencu od 54 kHz, onda je talasna dužina oko 68 mm. Odatle sledi da najmanja bočna dimenzija predmetnog betonskog tela ne sme biti manja od 70 mm. Ovakva provera regularnosti merenja se lako može uraditi u svakom pojedinačnom slučaju. Ako bi se koristila sonda predajnik koja emituje ultrazvučni talas veće frekvence od 54 kHz, onda minimalne bočne dimenzije betonskog elementa mogu biti manje nego u navedenom primeru. U poslednjoj deceniji dosta se radilo i na tzv. bezkontaktnoj metodi ispitivanja betona ultrazvukom [13], ali je to još uvek u eksperimentalnoj fazi.

Smatra se da varijacija temperature betona u granicama od 5 do 30 °C ne utiče značajno na rezultate merenja. S druge strane, ukoliko je temperatura izvan ovog opsega, preporučuju se određene korekcije rezultata prema tabeli 1 [16].

Brzina zvuka, pa tako i ultrazvuka, znatno je manja u vazduhu nego u vodi ili u čvrstim telima. Shodno tome, brzina ultrazvuka u vodom zasićenom betonu veća je nego u istom osušenom betonu čije su pore ispunjene vazduhom. Ovaj efekat naročito je izražen u slučaju kada se beton spravlja s visokim vodocementnim faktorom, što za posledicu ima veću poroznost. Razlika u brzini ultrazvuka može iznositi i do 4 do 5% [6].

U.M1.042:1998 and SRPS EN 12504-4:2008. Serbian authors have also done research on the application of ultrasound to characterize the concrete such as in [1], [3], and [17].

2 ULTRASOUND VELOCITY INFLUENTIAL FACTORS

Conducting of the concrete testing by the ultrasound method is fairly simple. However, a large number of tests showed that there may be problems in reproducing the results, because numerous factors influence their value. Further are mentioned the most important of those factors.

During the measuring process, it is very important to establish a proper contact between probes of the ultrasound device and the test surface of concrete. The concrete surface at the place where the sensors are placed must be coated by a thin layer of grease, into which the sensors are pressed so that there are no air bubbles remaining. If the concrete surface is rough, then it is necessary to make it even. The Rilem also proscribes the minimum permissible distance of the ultrasound device distance, this being 100 mm if the concrete is made with the largest aggregate grain of up to 30 mm, or the distance being 150 mm if the largest aggregate grain is up to 45 mm [15].

In most of the cases of testing of concrete specimens or structural elements have dimensions which do not affect the regularity of measuring. However, it must be taken into account when the lateral dimensions of concrete specimens are considerably smaller than the third dimension, that is, than the length which must be travelled by the ultrasonic wave. For instance, if the measured ultrasonic velocity in concrete is around 3700 m/s and if the emitting probe has a frequency of 54 kHz, then the wavelength is around 68 mm. This implies that the minimum lateral dimensions of the examined concrete specimen must not be smaller than 70 mm. Such verification of measuring regularity can easily be done in each individual case. If the probe were emitting an ultrasonic wave of higher frequency than 54 kHz, then the minimum lateral dimensions of the concrete elements can be smaller than in the mentioned example. In the previous decade, the so called contactless ultrasonic method [13] was dealt with, but everything is still in experimental stage.

It is considered that the variation of temperature in concrete in the range 5 to 30 °C does not have significant effects on measuring results. On the other hand, if the temperature is outside this range, certain correction of the results, according to the table 1 are recommended [16].

Sound velocity, and thus the ultrasound velocity, is significantly lower in air, in comparison to water and solid bodies. Accordingly, the ultrasonic speed in water saturated concrete is higher than in the same dried concrete whose pores are filled with air. This effect is especially prominent in case when the concrete is made with high water/cement ratio, which results in high porosity. The difference in ultrasonic velocity may amount 4 to 5% [6].

Tabela 1. Korekcija brzine ultrazvuka zbog promene temperature
 Table 1. Ultrasound velocity correction due to the temperature variation

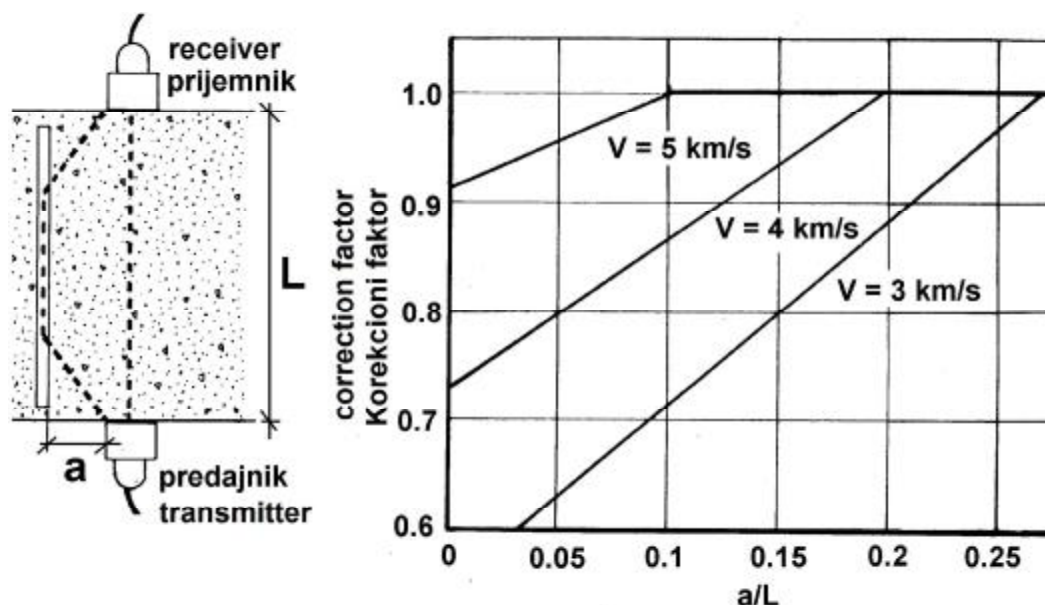
Temperatura betona Concrete temperature [°C]	Korekcija Correction [%]	
	Beton osušen na vazduhu Concrete dried in air	Vodom zasićen beton Concrete saturated with water
60	+ 5	+ 4
40	+ 2	+ 1,7
20	0	0
0	- 0,5	- 1
< -4	- 1,5	- 7,5

Može se reći da brzina ultrazvuka ne zavisi od naponskog stanja u betonskom elementu. Neko smanjenje brzine ultrazvuka može se desiti ukoliko je beton izložen znatnom statičkom opterećenju, na primer, od 60% do 70% ili više u odnosu na njegovu čvrstoću pri pritisku. Ovo se objašnjava pojavom mikroprslina unutar strukture betona.

Postojanje čelične armature u betonu smatra se jednim od najznačajnijih faktora koji mogu uticati na brzinu ultrazvuka [14]. Brzina ultrazvuka je od 50% do 70% veća u čeliku nego u betonu. Shodno tome, često se može očekivati veća brzina ultrazvuka u armiranom betonu nego u onom bez armature. Stoga, preporučuje se da se za merenja odaberu mesta na kojima se armatura ne pruža u pravcu puta koji prelazi ultrazvuk. Ukoliko to nije moguće, onda se prilikom izračunavanja brzine ultrazvuka moraju koristiti odgovarajući koeficijenti za korekciju (slika 1 [12]). Pored svega navedenog, postoji značajna verovatnoća da dobijeni rezultati merenja ne budu dovoljno tačni.

It can be stated that the ultrasonic velocity does not depend on the stress state in a concrete element. A certain reduction of ultrasonic velocity can occur if the concrete is exposed to a considerable static load, for instance of 60 to 70% or more in respect to its compressive strength. This is explained by the emergence of micro-cracks inside the concrete structure.

The presence of steel reinforcement is considered one of the most important factors which can affect the ultrasonic velocity [14]. The ultrasonic velocity is for around 50 to 70% higher in steel in comparison to concrete. Accordingly, often a higher velocity of ultrasound can be expected in the reinforced concrete than in that with no reinforcement. Therefore it is considered that when performing measuring, the measuring points are those where there is no reinforcement lying in the direction of the path travelled by the ultrasound. If this is not possible, then appropriate correction coefficients must be used when calculating ultrasound velocity, figure 1 [12]. Even with all those precautions there is a significant possibility that the measuring results are not sufficiently accurate.



Slika 1. Uticaj armature na brzinu prostiranja ultrazvuka, armatura paralelna s pravcem prostiranja ultrazvuka
 Figure 1. Influence of reinforcement on the ultrasound propagation velocity, the reinforcement is parallel to the direction of ultrasound propagation

Sastav betona – komponentni materijali od kojih se on spravlja – takođe utiče na brzinu ultrazvuka. To je potpuno logično jer od svojstava komponenti i njihovog udela zavise i svojstva betona. Navedeno se svakako odnosi i na čvrstoću pri pritisku, s kojom se brzina ultrazvuka često dovodi u korelaciju. S druge strane, nije jednako značajan uticaj svake komponente od kojih se beton spravlja.

Na primer, uticaj vrste cementa nema značajan efekat na brzinu ultrazvuka za isti dostignuti stepen hidratacije. Tačnije, mnogo veći uticaj ima dostignuti stepen hidratacije cementa, pri čemu je korelacija jasna i očigledna: veći stepen hidratacije – veća brzina ultrazvuka. Povećanje starosti betona, što je u direktnoj korelaciji s dostignutim stepenom hidratacije, logično utiče na povećanje brzine ultrazvuka. U početku, brzina ultrazvuka raste naglo, dok se kasnije prirast usporava s trendom sličnim kao i u slučaju prirasta čvrstoće pri pritisku betona tokom vremena.

Hemijski dodaci utiču na brzinu ultrazvuka – ako utiču na stopu hidratacije cementa. U tom smislu, najveći uticaj imaju regulatori brzine vezivanja i očvršćavanja betona, to jest akceleratori i retarderi. Uticaj aditiva tipa reduktora vode može se razmatrati preko smanjenog vodocementnog faktora. S druge strane, potpuno je logično da povećanje vodocementnog faktora utiče na smanjenje brzine ultrazvuka. Aeranti nemaju značajniji uticaj na vezu između brzine ultrazvuka i čvrstoće pri pritisku betona [8], što treba prihvatiti sa rezervom jer aeranti povećavaju sadržaj vazduha u betonu.

Od svih komponentnih materijala, agregat ima najveći uticaj na brzinu prostiranja ultrazvuka kroz beton. Uticaj agregata može se sagledati iz aspekta vrste i količine. Ispitivanjima je utvrđeno da je brzina ultrazvuka kroz zrna agregata veća nego kroz očvrslu cementnu pastu, što se direktno može dovesti u vezu s njihovom poroznošću. Ono što je veoma važno jeste to što su rezultati eksperimentalnih istraživanja pokazali da je za istu čvrstoću pri pritisku betona brzina ultrazvuka manja ako je beton spravljen s rečnim agregatom nego ako je spravljen s drobljenim agregatom. Takođe, postoje razlike u brzini ultrazvuka, u zavisnosti od mineraloškog sastava drobljenog agregata [20]. Tako, na primer, brzina ultrazvuka će biti veća u betonu s krečnjačkim agregatom nego u onom, spravljenom sa andezitom, dijabazom ili bazaltom, za isti nivo čvrstoće pri pritisku betona.

Upravo zbog toga što je uticaj agregata na brzinu ultrazvuka u betonu veoma značajan, u ovom radu se razmatra problematika brzine ultrazvuka u betonima u kojima je deo mineralnog agregata zamenjen recikliranom gumom, odnosno recikliranim staklom.

3 EKSPERIMENTALNI DEO

3.1 Materijali korišćeni u eksperimentu

Za spravljanje betonskih mešavina korišćen je čist portland cement Holcim CEM I 42,5 R i agregat iz reke J. Morave, podeljen u tri frakcije – 0/4 mm (učešće u mešavini 45%), 4/8 mm (25%) i 8/16 mm (30%). Konzi-

The composition of concrete, that is component materials, also affects the ultrasound velocity. This is completely logical, because the properties of concrete depend on the properties of its components and their proportion. This certainly applies to the compressive strength to which the ultrasound velocity is frequently correlated. On the other hand, the influence of all the components from which the concrete is made is not equally important.

For instance, the cement type has no significant effect on the ultrasound speed, for the same reached hydration degree. More accurately, much higher influence is affected by the reached cement hydration degree, whereby the correlation is clear and obvious – the higher hydration degree - the higher the ultrasound velocity. The increase of the age of concrete, which is directly correlated to the achieved hydration degree, logically results in the increase of ultrasound velocity. In the beginning, the ultrasound velocity increases abruptly, while later, the increment slows down with the similar trend as one found in the increase of compressive strength of concrete in time.

Chemical admixtures also affect the ultrasound velocity if they affect the cement hydration rate. In these terms, the highest influence has the concrete binding and hardening rate regulators, that is accelerants and retarders. The influence of the water reduction type admixtures can be analyzed through the reduced water/cement ratio. On the other hand, it is completely logical that the increase of water cement ratio has effects on reduction of ultrasound velocity. The air-entrainers have insignificant influence on the correlation between the ultrasound velocity and compressive strength of concrete [8], which must be taken with a reserve, since the air-entrainers increase the content of air in concrete.

Of all the component materials, aggregate has the most effect on the propagation of velocity through concrete. The influence of aggregate can be viewed from the aspect of type and of quantity. The tests indicated that the ultrasound velocity through the aggregate grains is higher than through the hardened cement matrix, which can directly correlated with their porosity. What is very important is that the results of the experimental research showed that for the same compressive strength the ultrasound velocity is lower if the concrete is made with the river aggregate in comparison to the concrete made with the crushed aggregate [20]. Thus, for example, the ultrasound velocity will be higher in the concrete with limestone aggregate than with that made with andesite, diabase or basalt for the same level of compressive strength of concrete.

Exactly for this reason, that the effects of aggregate on velocity of ultrasound in concrete are very important, the issue of ultrasound velocity in concretes where the portion of mineral aggregate is replaced by recycled rubber, that is, recycled glass is considered in this paper.

3 EXPERIMENTAL PART

3.1 Materials used in the experiment

For making of all concrete mixtures is used pure Portland cement Holcim CEM I 42,5 R and the aggregate from the South Morava river separated in three fractions 0/4 mm (share in the mixture 45%), 4/8

stencija betonskih mešavina održavana je konstantnom u okviru klase sleganja S3, pomoću superplastifikatora Sika Viscocrete 3070.

Reciklirana guma, proizvođača „Tigar“ a.d. Pirot, imala je izgled granula koje po krupnoći odgovaraju frakciji 0,5 mm do 4 mm (slika 2). Zapreminska masa gume iznosila je 1150 kg/m^3 , dok je zapreminska masa u rasutom stanju iznosila 480 kg/m^3 . Takođe, za spravljanje betona korišćeno je i reciklirano staklo krupnoće od 0 mm do 4 mm. Staklo je dobijeno usitnjavanjem katodnih cevi s čije unutrašnje površine je prethodno uklonjen fluorescentni sloj u preduzeću „Jugo-impex“ EER Niš (slika 3). Granulometrijski sastavi sitnog rečnog agregata, granulirane gume i drobljenog stakla prikazani su na slici 4.

mm (25%) and 8/16 mm (30%). The consistency of concrete mixes was kept constant within the slump class S3 with by means of super plasticizer Sika Viscocrete 3070.

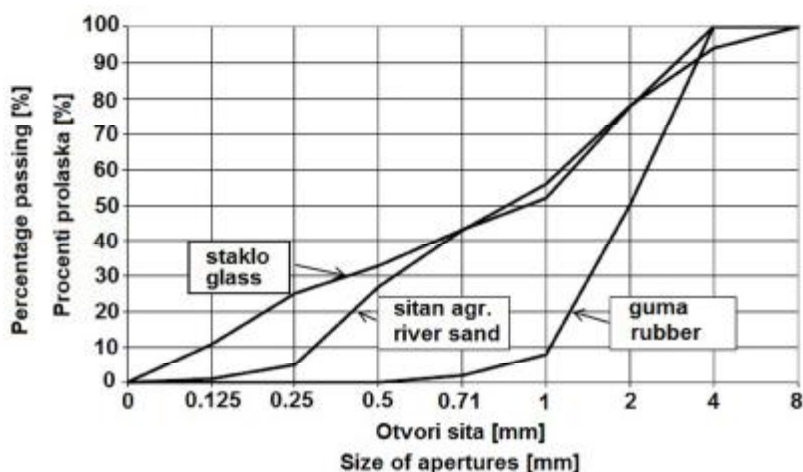
The recycled rubber manufactured by „Tigar“ a.d. Pirot had the appearance of granules whose grain size correspond to the fraction 0,5 to 4 mm, figure 2. The bulk density of the rubber was 1150 kg/m^3 while the loose state bulk density was 480 kg/m^3 . Also, for making concrete, recycled glass 0 to 4 mm was used. It was obtained by grounding of cathode tubes, whose fluorescent film was previously removed in the company „Jugo-impex“ E.E.R. Niš, figure 3. Particle size distribution of fine river aggregate and crushed glass is displayed in figure 4.



Slika 2. Izgled granula gume 0,5 – 4 mm
Figure 2. Appearance of rubber granules 0,5 – 4 mm



Slika 3. Izgled drobljenog stakla 0 – 4 mm
Figure 3. Appearance of crushed glass 0 – 4 mm



Slika 4. Granulometrijski sastav sitnog rečnog agregata, granulirane gume i drobljenog stakla
Figure 4. Particle size distribution of fine river aggregate, granulated rubber and crushed glass

3.2 Sastav betonskih mešavina

Ukupno je napravljeno sedam serija betonskih mešavina (tabela 2). Etalon beton (oznaka E) spravljen je sa 400 kg cementa, 1780 kg trofrakcijskog agregata i vodocementnim faktorom 0,42. Radi postizanja sleganja klase S3, dodato je 0,8% superplastifikatora. Tri betonske mešavine spravljene su tako što je deo sitnog agregata zamenjen granulama reciklirane gume. Izražena po zapremini, zamena sitnog agregata urađena je u iznosu od 10% (oznaka betona R10), 20% (R20) i 30% (R30). Vodocementni faktor održavan je konstantnim i iznosio je 0,42, tako da je mera sleganja koja odgovara klasi S3 održavana dodavanjem odgovarajuće količine superplastifikatora (tabela 2). Reciklirano staklo je takođe korišćeno za zamenu dela sitnog agregata i to težinski u iznosu od 25%, 50% i 75%. Ovi betoni obeleženi su sa G25, G50 i G75. Sastavi ovih betonskih mešavina dati su u tabeli 2.

3.2 Concrete mixtures composition

A total of seven batches of concrete mixtures were made, table 2. The benchmark concrete (designation E) was made with 400 kg of cement, 1780 kg three-fraction aggregate and water/cement ratio 0.42. In order to achieve the slump class S3, 0,8% of super plasticizer was added. Three concrete mixtures are made by replacing the part of fine aggregate by recycled rubber granules. In terms of volume, the replacement of fine aggregate amounted to 10% (concrete designation R10), 20% (R20) and 30% (R30). The water/cement ratio was kept constant, and amounted to 0.42 so the slump class S3 was maintained by adding the appropriate quantity of super plasticizer, table 2. The recycled glass was also used for replacement of the part of fine aggregate, in terms of weight, in the amount of 25%, 50% and 75%. These concretes were designated with G25, G50 and G75. The compositions of these concrete mixtures are displayed in table 2.

Tabela 2. Sastavi betonskih mešavina korišćenih u eksperimentu
Table 2. Compositions of the concrete mixtures used in the experiment

beton concrete	agregat aggregate						guma rubber kg/m ³	staklo glass kg/m ³	cement kg/m ³	voda water kg/m ³	aditiv admixt. kg/m ³
	0/4 mm		4/8 mm		8/16 mm						
	%	kg/m ³	%	kg/m ³	%	kg/m ³					
E	45	801	25	445	30	534	–	–	400	168	3.20
R10	45	638	25	445	30	534	64	–	400	170	3.65
R20	45	465	25	445	30	534	126	–	400	168	4.00
R30	45	290	25	445	30	534	189	–	400	170	4.40
G25	45	601	25	445	30	534	–	200	400	170	3.40
G50	45	401	25	445	30	534	–	400	400	170	3.80
G75	45	200	25	445	30	534	–	601	400	170	4.20

3.3 Rezultati ispitivanja i diskusija

Na svežem betonu urađena su ispitivanja: konzistencije merenjem sleganja prema standardu SRPS ISO 4109:1997, sadržaja uvučenog vazduha prema standardu SRPS ISO 4848:1999 i zapreminske mase u zbijenom stanju prema standardu SRPS ISO 6276:1997. Rezultati pobrojanih ispitivanja prikazani su u tabeli 3.

3.3 Test results and discussion

On the fresh concrete, the following tests were performed: consistency test by slump test according to SRPS ISO 4109:1997 standard, entrained air according to SRPS ISO 4848:1999 standard and density of compacted state according to the standard SRPS ISO 6276:1997. The results of the listed tests are displayed in tab. 3.

Tabela 3. Rezultati ispitivanja svežeg betona
Table 3. Fresh concrete test results

Beton Concrete	Prosečna vrednost zapreminske mase Bulk density average mass [kg/m ³]	Klasa sleganja		Sadržaj uvučenog vazduha Entrained air contents [%]
		Slump class		
E	2375	S3 (110 mm)		3.1
R10	2285	S3 (100 mm)		3.5
R20	2155	S3 (90 mm)		5.2
R30	2060	S3 (100 mm)		7.2
G25	2305	S3 (120 mm)		3.0
G50	2245	S3 (120 mm)		4.1
G75	2210	S3 (120 mm)		5.2

U ovom radu prikazani su rezultati ispitivanja: zapreminske mase (SRPS ISO 6275:1997), čvrstoće pri pritisku (SRPS ISO 4012:2000) i brzine ultrazvuka pri starosti uzoraka od 28 dana, tabela 4.

Rezultati ispitivanja pokazuju da se s povećanjem udela gume, a takođe i drobljenog stakla, konzistencija betona menja u pogledu smanjenja sleganja. Do ovakvih rezultata došli su Park, Li i Kim u studiji [10]. Pošto je jedan od uslova prilikom ispitivanja bio spravljanje betona jednake klase konzistencije, to je postizano dodavanjem plastifikatora. Kako se iz tabele 2 može videti, procenat dodatka aditiva raste s povećanjem procenta dodatka gume i to od 0,8% za etalon beton do 1,1% za beton sa dodatkom 30% gume. Kod betona sa dodatkom drobljenog stakla procenat dodatka aditiva je najveći kod betona sa dodatkom 75% stakla i iznosi 1,05%. Ovakvi rezultati su u saglasnosti sa rezultatima prikazanim u [2].

This paper presents the results of the following tests: bulk density (SRPS ISO 6275:1997), compressive strength (SRPS ISO 4012:2000) and ultrasound velocity at the age of samples of 28 days, table 4.

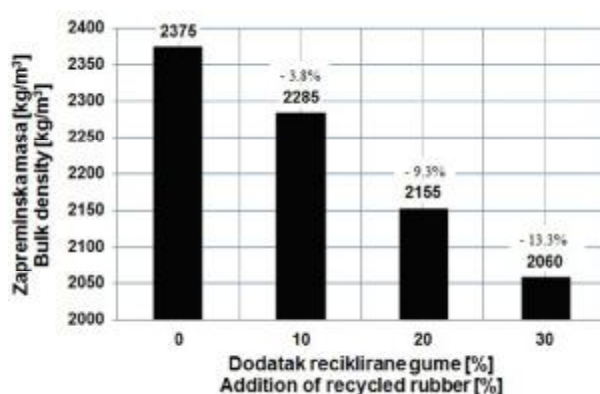
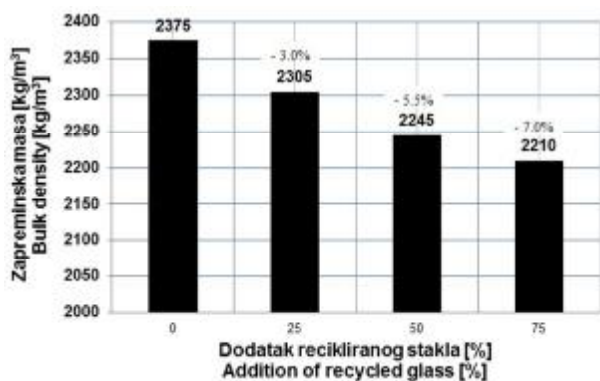
The test results indicate that with the increase of rubber share, and of crushed glass, the concrete consistency changes, in terms of decrease of slump. These results were obtained by Park, Li and Kim in the study [10]. Since one of the conditions during the tests was making of the concrete of equal consistency class, which was accomplished by addition of plasticizers. From the table 2 can be concluded that the percentage of addition of admixtures rises with the increase of the added rubber percentage, from 0.8% for the benchmark concrete to 1.1% for the concrete with the addition of 30% of rubber. In the concretes having 75% of crushed glass the percentage of the admixture is the highest, and it amounts to 1,05%. Such results are in accord with results displayed in [2].

Tabela 4. Rezultati ispitivanja očvrsllog betona pri starosti od 28 dana
Table 4. The hardened concrete test results at the age of 28 days

Beton Concrete	Zapreminska masa Bulk density [kg/m ³]	Čvrstoća pri pritisku Compressive strength [MPa]	Brzina ultrazvuka Ultrasound velocity [m/s]
E	2370	46,9	4570
R10	2260	40,2	4479
R20	2145	25,2	4073
R30	2057	18,6	3726
G25	2300	41,3	4450
G50	2240	37,0	4412
G75	2205	34,0	4390

Zapreminska masa svežeg betona smanjuje se s povećanjem količine dodatka gume, odnosno recikliranog stakla (slika 5).

Bulk density of fresh concrete decreases with the increase of the added rubber, i.e. crushed glass, figure 5.



Slika 5. Promena zapreminske mase očvrsllog betona s povećanjem dodatka recikliranog stakla i reciklirane gume
Figure 5. Variation of bulk density of hardened concrete with the increase of addition of recycled glass and rubber

Najveće smanjenje zapreminske mase iznosi 13,3% u slučaju dodatka 30% gume. Dodatak stakla u manjoj meri doprinosi smanjenju zapreminske mase od dodavanja gume. Najveće je u slučaju zamene sitnog agregata sa 75% stakla i iznosi 7%. Ovako dobijeni rezultati u saglasnosti su s rezultatima navedenim u [19].

Sadržaj vazduha u svežem betonu povećava se s povećanjem dodatka reciklirane gume i s povećanjem

The highest decrease of bulk density is 13.3% in case of addition of 30% of rubber. The addition of glass to a smaller degree results in the decrease of the bulk density than the addition of rubber. The decrease is the highest in case of replacement of fine aggregate with 75% of glass and it is 7%. The results obtained in this way are in accord with the results presented in [19].

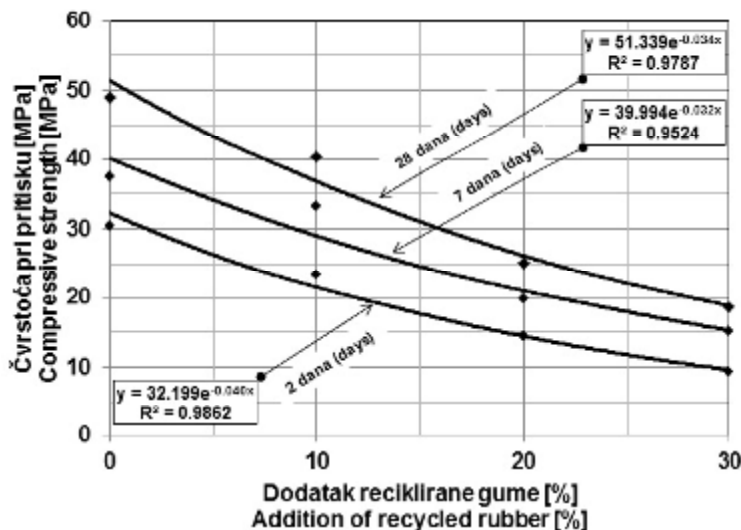
The content of air in fresh concrete increases with

dotatka drobljenog stakla. Međutim, može se zapaziti (tabela 3) da je sadržaj uvučenog vazduha i u etalon betonu (3,1%) bio veći od uobičajenog koji se kreće od 1% do 2%. Razlog je to što upotrebljeni superplastifikator ima dodatni efekat da u maloj meri uvlači vazduh, što je laboratoriji iz ranijeg iskustva poznato. To znači da se samo može konstatovati da se sa dodavanjem predmetnih recikliranih materijala povećava sadržaj vazduha, ali se precizniji podaci o tome koliki je taj uticaj ovom prilikom ne mogu izneti.

Uticaj količine dodatka gume na čvrstoću pri pritisku betona pri starosti od dva, sedam i dvadeset osam dana prikazana je na slici 6, dok je uticaj dodatka recikliranog stakla prikazan na slici 7.

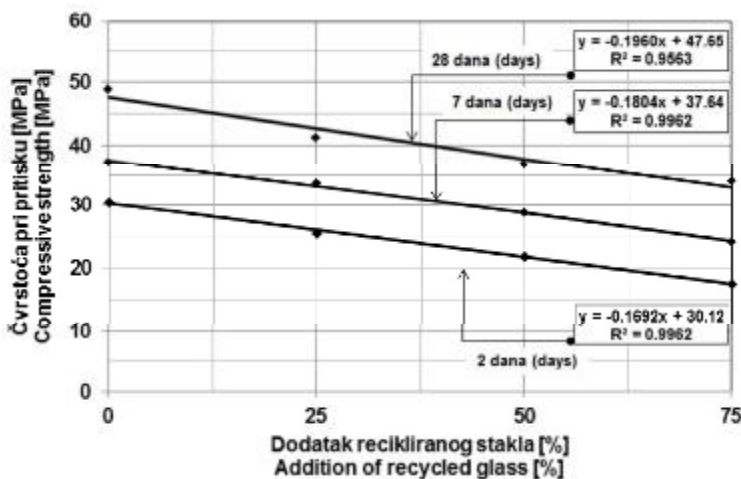
the increase of recycled rubber and crushed glass. However, in the table 3 it can be observed that the content of entrained air in the benchmark concrete (3,1%) was higher than the usual which ranges between 1 to 2%. The reason for this is that the used super plasticizer has an additional effect – that it entrains air, which was known from the earlier laboratory experience. This means that it can only be stated, that by adding the mentioned recycled materials, the content of air is increased, but the more precise data on what the extent of these effects is, cannot be presented on this occasion.

The effects of the amount of the recycled rubber added on the compressive strength of concrete at the ages of 2, 7 and 28 days is presented in figure 6, while the influence of addition of recycled rubber is presented in figure 7.



Slika 6. Uticaj dodatka reciklirane gume na promenu čvrstoće pri pritisku betona pri starosti od dva, sedam i dvadeset osam dana

Figure 6. Influence of addition of recycled rubber on the change of compressive strength of concrete at the ages of 2, 7 and 28 days



Slika 7. Uticaj dodatka recikliranog stakla na promenu čvrstoće pri pritisku betona pri starosti od dva, sedam i dvadeset osam dana

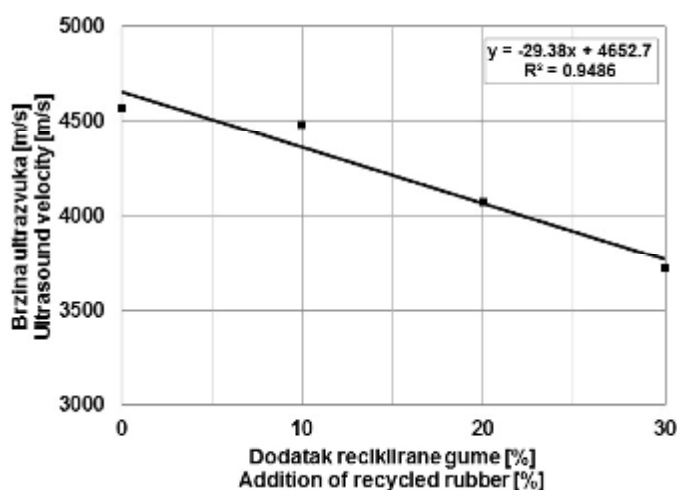
Figure 7. Influence of addition of recycled glass on the change of compressive strength of concrete at the ages of 2, 7 and 28 days

Povećanje količine dodatka reciklirane gume značajno utiče na smanjenje čvrstoće pri pritisku betona. Kako se iz toka dijagrama na slici 6 jasno vidi, smanjenje čvrstoće gotovo je jednako pri svim starostima za isti procenat dodatka gume. Dodatak 10% gume uslovio je smanjenje čvrstoće pri pritisku pri starosti od 28 dana za ≈ 18%, dodatak gume od 20% za ≈ 48%, a dodatak gume od 30% za čak 62%. Dodavanje recikliranog stakla takođe uzrokuje smanjenje čvrstoće pri pritisku, ali znatno manje od dodavanja gume. Tako, zamena sitnog rečnog agregata sa 25% recikliranog stakla smanjuje čvrstoću pri pritisku betona za oko 15%, zamena od 50% smanjuje čvrstoću za oko 24%, a zamena od 75% smanjuje čvrstoću za oko 30%.

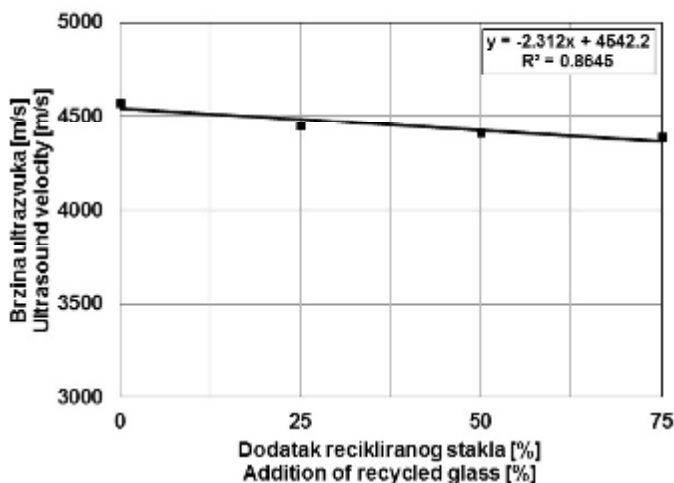
Uticaj dodatka reciklirane gume na promenu brzine ultrazvuka prikazan je na slici 8, a uticaj dodatka recikliranog stakla na slici 9.

The increase of the added quantity of recycled rubber significantly affects the reduction of compressive strength of concrete. As can be clearly observed from the diagram flow in figure 6, the reduction of the strength is almost equal at all the ages for the same percentage of added rubber. The addition of 10% of rubber caused the reduction of compressive strength at the age of 28 days for ≈ 18%, addition of 20% of rubber for ≈ 48%, and addition of 30% of rubber for as much as 62%. The addition of recycled glass also brings about the reduction of compressive strength but a far smaller extent than the addition of rubber. Therefore, if replacement of fine river aggregate with 25% of recycled glass reduces the compressive strength for around 15%, the replacement 50% reduces the strength for around 24%, and the replacement of 75% causes the reduction of strength for around 30%.

The influence of addition of recycled rubber to the change of ultrasound velocity is displayed in figure 8 and the influence of addition of recycled glass in figure 9.



Slika 8. Uticaj dodatka reciklirane gume na promenu brzine ultrazvuka pri starosti betona od 28 dana
Figure 8. The influence of addition of recycled rubber to the change of ultrasound velocity at the concrete age of 28 days



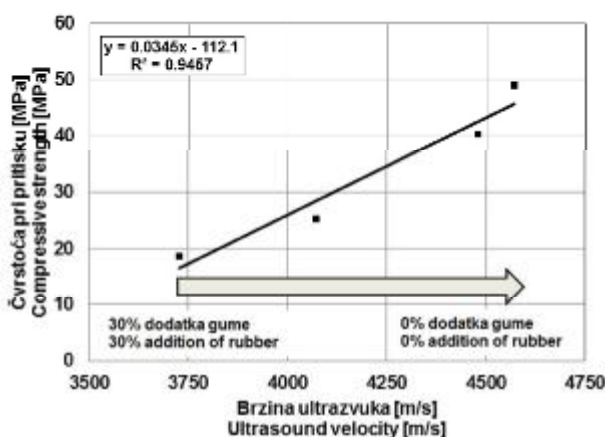
Slika 9. Uticaj dodatka recikliranog stakla na promenu brzine ultrazvuka pri starosti betona od 28 dana
Figure 9. The influence of addition of recycled glass to the change of ultrasound velocity at the concrete age of 28 days

Povećanje dodatka reciklirane gume značajno utiče na smanjenje brzine prostiranja ultrazvučnog talasa kroz beton. To smanjenje u slučaju dodatka 30% reciklirane gume iznosi čak oko 18,5%. Ovakav trend u relaciji *brzina ultrazvuka – dodatak gume* jeste očekivan, pre svega zbog znatno manje brzine prostiranja ultrazvuka kroz gumu nego kroz beton. U slučaju vulkanizirane gume, brzina ultrazvuka kroz takav materijal iznosi svega 50 do 60 m/s.

Kada se govori o betonu sa dodatkom recikliranog stakla, određeno smanjenje brzine ultrazvuka je izmereno, ali to je znatno manje izraženo nego u slučaju betona sa dodatkom gume. Zamena sitnog agregata sa 75% recikliranog stakla uzrokuje smanjenje brzine ultrazvuka od oko 4%. Manja zamena sitnog agregata recikliranim staklom utiče na smanjenje brzine ultrazvuka za svega 2,5 do 3,5%, što se ne može smatrati značajnim uticajem.

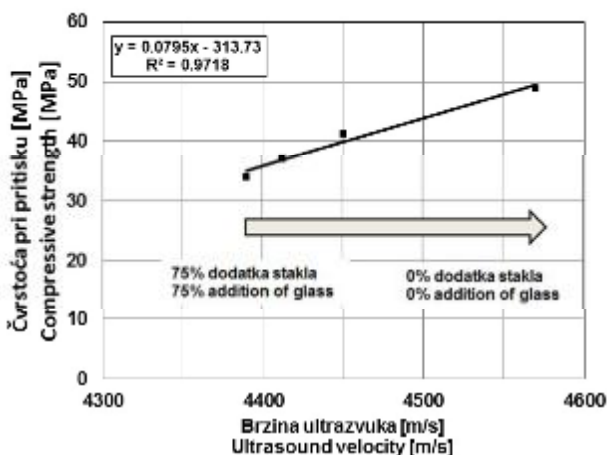
The increase of the addition of recycled rubber significantly affects the reduction of ultrasound wave velocity through the concrete. This reduction, in case of addition of 30% of recycled rubber is as much as 18.5%. Such trend in the relation ultrasound velocity – rubber addition is expected, primarily due to the significantly lower velocity of ultrasound propagation through the rubber, in respect to concrete. In case of a vulcanized rubber, the speed of ultrasound through such material is as little as 50 to 60 m/s.

When the concrete with the addition of recycled glass is discussed, a certain reduction of ultrasound speed was measured, but it is less pronounced than in concretes with the added rubber. The replacement of fine aggregate with 75% of recycled glass causes reduction of ultrasound velocity for around 4%. Small replacement of fine aggregate with recycled glass causes the ultrasound velocity reduction for 2.5 to 3.5% which cannot be considered a significant influence.



Slika 10. Čvrstoća pri pritisku betona pri starosti od 28 dana i korespondirajuća brzina ultrazvuka pri promeni dodatka gume od 30% do nule

Figure 10. Compressive strength of concrete at the age of 28 days and corresponding ultrasound velocity for variation of added rubber contents from 30% to zero



Slika 11. Čvrstoća pri pritisku betona pri starosti od 28 dana i korespondirajuća brzina ultrazvuka pri promeni dodatka recikliranog stakla od 75% do nule

Figure 11. Compressive strength of concrete at the age of 28 days and corresponding ultrasound velocity for variation of added recycled glass contents from 75% to zero

Zavisnost između čvrstoće pri pritisku betona i brzine ultrazvuka u funkciji promene procenta dodatka gume prikazana je na slici 10, dok je ista zavisnost samo za dodatak recikliranog stakla prikazana na slici 11.

Ako se razmatra čvrstoća pri pritisku betona sa dodatkom recikliranog stakla (slika 11), može se zapaziti da veoma maloj promeni brzine ultrazvuka odgovara značajna promena čvrstoće. Promena brzine ultrazvuka od samo 12 m/s odgovara promeni čvrstoće od 1 MPa. Ili, promeni čvrstoće pri pritisku betona sa dodatkom recikliranog stakla od 1 MPa odgovara promena vremena potrebnog ultrazvučnom talasu da pređe rastojanje od 150 mm od samo $0,09 \mu s \approx 0,1 \mu s$, što je na samoj granici rezolucije ultrazvučnog aparata. Navedeno ukazuje da je metoda ultrazvuka, barem kada je reč o betonima sa dodatkom recikliranog stakla, veoma delikatna i da zahteva mnogo pažnje prilikom rada kako ne bismo doneli pogrešne zaključke.

4 ZAKLJUČAK

Na osnovu rezultata dobijenih putem eksperimentalnih ispitivanja prikazanih u ovom radu, može se izvesti niz zaključaka.

Zamena dela sitnog rečnog agregata recikliranom gumom ili recikliranim staklom menja konzistenciju svežeg betona u pogledu smanjenja sleganja. Kako bi se željena konzistencija održala, neophodna je primena aditiva tipa reduktora vode. Da bi se konzistencija održala nepromenjenom na željenom nivou, s povećanjem količine reciklirane gume, odnosno recikliranog stakla količina dodatog aditiva takođe raste.

Zapreminska masa svežeg betona smanjuje se s povećanjem količine dodatka reciklirane gume, odnosno recikliranog stakla. Najveće smanjenje zapreminske mase iznosi 13,3% u slučaju dodatka 30% gume. Reciklirano staklo u manjoj meri doprinosi smanjenju zapreminske mase svežeg betona i najveće je u slučaju zamene sitnog agregata sa 75% stakla, kada iznosi 7%.

Sadržaj uvučenog vazduha u svežem betonu povećava se s povećanjem dodatka reciklirane gume i s povećanjem dodatka recikliranog stakla. Ovaj zaključak, posebno kada je u pitanju reciklirano staklo, zahteva dodatna ispitivanja.

Povećanje količine dodatka reciklirane gume značajno utiče na smanjenje čvrstoće pri pritisku betona i u slučaju dodatka gume od 30% to smanjenje iznosi čak 62%. Dodavanje recikliranog stakla znatno manje utiče na smanjenje čvrstoće pri pritisku. Tako, zamena sitnog rečnog agregata sa 75% recikliranog stakla smanjuje čvrstoću oko 30%.

Povećanje dodatka reciklirane gume značajno utiče na smanjenje brzine prostiranja ultrazvučnog talasa kroz beton i u slučaju dodatka 30% reciklirane gume iznosi čak oko 18,5%.

Dodatak recikliranog stakla znatno manje utiče na smanjenje brzine ultrazvuka u betonu. Zamena sitnog agregata sa 75% recikliranog stakla smanjuje brzinu ultrazvuka oko 4%.

U slučaju zamene sitnog agregata recikliranim staklom, promena brzine ultrazvuka od samo 12 m/s odgovara promeni čvrstoće od čak 1 MPa. Ovo ukazuje

Dependency between the compressive strength and the ultrasound velocity is in the function of the change of percentage of added rubber is presented in figure 10, while the same dependency, only for the added recycled glass is presented in figure 11.

If the compressive strength of concrete with the addition of recycled glass (figure 11) is taken into consideration, it can be observed that a very small variation of ultrasound variation is correlated with the considerable strength variation. The change of ultrasound speed of only 12 m/s corresponds to the strength variation of 1 MPa. Or, the variation of compressive strength of concrete with the recycled glass added of 1 MPa corresponds to the variation of time required for the ultrasound wave to travel the distance of 150 mm of only $0,09 \mu s \approx 0,1 \mu s$ which is at the very limit of ultrasonic device resolution. This implies that the ultrasonic method, at least when the concretes with the recycled glass added are in question, is very delicate and calls for a lot of attention in the course of work so as to result in the correct conclusions.

4 CONCLUSION

On the basis of the results obtained by the experimental research presented in this paper, the following conclusions can be made:

Replacement of a portion of fine river aggregate with the recycled rubber or recycled glass brings about the change of the consistency of fresh concrete, in terms of slump reduction. In order to maintain the desired consistency it is necessary to use the water reducer admixture. If one is to retain consistence at a steady desired level as the amount of recycled rubber/recycled glass increases, one must increase the quantity of added admixture.

The bulk density of fresh concrete reduces with the increase of the share of recycled rubber/recycled glass. The biggest reduction of bulk density is 13.3% in case when 30% of rubber is added. Recycled glass to a lesser extent affects the reduction of bulk density of fresh concrete, and in case of replacement of fine aggregate with 75% of glass, it is 7%.

The content of entrained air in fresh concrete increases with the increase of addition of recycled rubber/recycled glass. This conclusion, in particular for glass, requires additional research.

Increase of the amount of added recycled rubber has a significant effect in terms of reduction of compressive strength of concrete, and in case the percentage of added rubber is 30% this reduction is as much as 62%. Addition of recycled glass has a less effect on reduction of compressive strength. Thus, replacement of the fine river aggregate with 75% of recycled glass causes reduced compressive strength of 30%.

The increase of the addition of recycled rubber significantly influences reduction of ultrasonic wave propagation velocity through concrete, and in case when 30% of recycled rubber is added, it amounts to as much as 18.5%.

The addition of recycled glass to a lesser extent influences the reduction of ultrasonic velocity in concrete. Replacement of fine aggregate with 75% of recycled glass brings about the reduction of ultrasound velocity of around 4%.

na to da je metoda ultrazvuka, kada je reč o betonima sa dodatkom recikliranog stakla, veoma osetljiva.

ZAHVALNOST

Ovaj rad predstavlja deo istraživanja obavljenog u okviru projekta TR 36017 – „Istraživanje mogućnosti primene otpadnih i recikliranih materijala u betonskim kompozitima, sa ocenom uticaja na životnu sredinu, u cilju promocije održivog građevinarstva u Srbiji”, koji je podržalo Ministarstvo za nauku i tehnologiju Republike Srbije. Duboko smo zahvalni zbog te podrške.

5 LITERATURA REFERENCES

- [1] Arsić D., Grdić Z., Topličić-Ćurčić G., Ristić S.N.: „Mogućnost primene stakla kao agregata za beton”, Prvi nacionalni simpozijum sa međunarodnim učešćem TEIK 2010, Niš, knjiga 3, str. od B-11 do B-16.
- [2] Chen S. H., Chao-Shun C., Her-Yung W., Wei-Lun H. „Mixture design of high performance recycled liquid crystal glasses concrete (HPGC)” *Construction and Building Materials* 25, no. 10, 2011, pp. 3886–3892.
- [3] Grdić Z., Zlatkov D.: „Kontrola sanacije prslina u betonu metodom ultrazvuka”, *Zbornik radova, Simpozijum „Materijali i konstrukcije”, posvećen životu i delu akademika Đorđa Lazarevića, Surdulica, 2003, str. 184–190.*
- [4] Hornibrook F. B. „Application of sonic method to freezing and thawing studies of concrete”, *ASTM Bulletin*, no. 101, 1939, pp. 5–8.
- [5] Jones R. „The Application of Ultrasonic to the Testing of Concrete” *Research*, London, England 383, 1948, pp. 364–368.
- [6] Jones R. „The Non-Destructive Testing of Concrete”, *Magazine of Concrete Research*, Vol. 1, Issue 2, 1949, pp. 67–78.
- [7] Leslie J. R., Cheesman W. J. „An ultrasonic method of studying deterioration and cracking in concrete structures”, *Journal of the American Concrete Institute*, vol. 46, no. 1, 1949. pp. 17–36.
- [8] Malhotra V. M., Carino N.J. (eds.) „Handbook on nondestructive testing of concrete”, CRC Press LLC, ASTM International, 2004, pp. 8–1.
- [9] Obert L. „Sonic method of determining the modulus of elasticity of building materials under pressure”, *ASTM*, vol. 39, 1939, pp. 987–998.
- [10] Park S. B., Bong C. L., Jeong H. K. „Studies on mechanical properties of concrete containing waste glass aggregate”, *Cement and concrete Research* 34, no. 12, 2004, pp. 2181–2189.
- [11] Powers T. C. „Measuring Young’s modulus of elasticity by means of sonic vibrations”, *ASTM*, vol. 38, no. Part II, 1938, pp. 460–469.
- [12] Pundit Manual for the use, C.N.S. Electronics Ltd., 61-63 Holmes Road, London, NW5
- [13] Purnell P., Gan T.H, Hutchins D.A, Berriman J. „Noncontact ultrasonic diagnostics in concrete: A preliminary investigation”, *Cement and Concrete Research*, Vol. 34, Issue 7, 2004, pp. 1185–1188
- [14] Ranković S., Drenić D., Grdić Z.: „Experimental determination of the concrete type by the ultrasound method in densely reinforced cross-sections: Rigid body effect”, *Zbornik radova Građevinsko-arhitektonskog fakulteta u Nišu*, no. 19, 2003, pp. 201–212.
- [15] RILEM Recommendation NDT 1, Testing of concrete by the ultrasonic pulse method, Paris, Dec. 1972.
- [16] Standard BS 1881, Part 203, „Recommendations for Measurement of Velocity of Ultrasonic Pulses in Concrete”, British Standards Institution, London, 1986.
- [17] Terzić A., Pavlović L., Radojević Z.: „Correlation between mechanical properties and microstructure of refractory composites determined using non-destructive testing method”, *Građevinski materijali i konstrukcije*, 2009, vol. 52, iss. 3–4, pp. 35–46.
- [18] Thompson W. T. „Measuring changes in physical properties of concrete by the dynamic method”, *ASTM*, vol. 40, 1940, pp. 1113–1129.
- [19] Topcu I. B., Canbaz M. „Properties of concrete containing waste glass” *Cement and Concrete Research* 34, no. 2, 2004, pp. 267–274.
- [20] Topličić-Ćurčić G. „Influence of Physico-Mechanical Characteristics of Various Kinds of Crushed Mineral Aggregate on the Concrete Properties with the Special Focus on Strength”, Ph.D. dissertation, Faculty of Civil Engineering and Architecture, University of Nis, 2009.

ACKNOWLEDGEMENTS

The work reported in this paper is a part of investigation within the research project TR 36017 „Utilization of by – products and recycled waste materials in concrete composites in the scope of sustainable construction development in Serbia: investigation and environmental assessment of possible applications“ supported by Ministry for Science and Technology, Republic of Serbia. This support is gratefully acknowledged.

REZIME

UTICAJ DODATKA RECIKLIRANE GUME I RECIKLIRANOG STAKLA NA PROMENU BRZINE ULTRAZVUKA U BETONU

Dušan GRDIĆ
Nenad RISTIĆ
Gordana TOPLIČIĆ ĆURČIĆ

Primena recikliranog stakla i reciklirane gume – s ciljem zamene dela agregata u betonu – javlja se u praksi i predstavlja predmet izučavanja u mnogim laboratorijama širom sveta. U ovom radu prikazan je deo eksperimentalnih istraživanja, čiji je cilj utvrđivanje uticaja koji ovi reciklirani materijali imaju na promenu svojstava svežeg i očvrstlog betona. Prilikom eksperimentalnog rada, posebna pažnja posvećena je izučavanju uticaja koji upotreba recikliranog stakla i reciklirane gume ima na promenu brzine ultrazvučnog talasa u betonu, što je dovedeno i u korelaciju sa čvrstoćom betona pri pritisku. Utvrđeno je da povećanje dodatka reciklirane gume znatno utiče na smanjenje brzine prostiranja ultrazvučnog talasa kroz beton. U slučaju dodatka 30% reciklirane gume, to smanjenje iznosi čak oko 18,5%. Dodatak recikliranog stakla znatno manje utiče na smanjenje brzine ultrazvuka u betonu. Zamena sitnog agregata sa 75% recikliranog stakla smanjuje brzinu ultrazvuka oko 4%.

Ključne reči: beton; brzina ultrazvuka; reciklirana guma; reciklirano staklo.

SUMMARY

EFFECTS OF ADDITION OF RECYCLED RUBBER AND RECYCLED GLASS ON THE VARIATIONS OF ULTRASONIC VELOCITY IN CONCRETE

Dusan GRDIC
Nenad RISTIC
Gordana TOPLICIC-CURCIC

Application of recycled rubber and recycled glass in replacement of a portion of aggregate has been present in practice and it is the subject of research in many laboratories worldwide. In this paper is presented a part of experimental research whose goal was to determine the effects these recycled materials have on changing the properties of fresh and hardened concrete. In the course of experimental work, a special attention was paid to the study of the effects the usage of recycled glass and recycled rubber has on the variation of ultrasound wave velocity in concrete, which is correlated with the compressive strength of concrete. It was found the increase of added recycled rubber has significant effects on reduction of ultrasound wave propagation through concrete. In case of addition of 30% of recycled rubber, this decrease amounts to even around 18.5%. The addition of recycled glass has considerably smaller effect on the reduction of ultrasonic velocity of around 4%.

Keywords: concrete, ultrasound velocity, recycled rubber, recycled glass

LAMINIRANI TANKOZIDNI NOSAČI – DRUGI DEO

LAMINATED THIN-WALLED BEAMS - SECOND PART

Aleksandar PROKIĆ
Martina VOJNIĆ PURČAR

ORIGINALNI NAUČNI RAD
ORIGINAL SCIENTIFIC PAPER
UDK: 624.073.8.014.2 = 861

1 UVOD

Kompozitni tankozidni nosači nalaze sve veću primenu i upotrebu u raznim granama industrije. U poslednjih nekoliko decenija raste i njihova upotreba u građevinarstvu zahvaljujući brojnim prednostima, kao što su izuzetno mala težina u odnosu na otpornost, te otpornost na koroziju, dobre mehaničke karakteristike itd.

Zbog sve veće upotrebe ovog materijala, potrebna je detaljna analiza radi ispitivanja njihovog ponašanja. Ovaj rad predstavlja nastavak prvog dela rada – Laminirani tankozidni nosači – koji se bazirao na statičkim problemima tankozidnih preseka. U drugom delu će biti prikazane dinamičke karakteristike laminiranih tankozidnih nosača. Izvešće se jednačine kretanja za slučaj proizvoljnog poprečnog preseka i proizvoljnog rasporeda laminata, pokazaće se kako na jednačine kretanja utiče pogodan izbor poprečnog preseka, kao i raspored i orijentacija vlakana. Za karakterističan slučaj će se izvesti rešenje za kružne frekvencije slobodnih harmonijskih vibracija. Na primeru koji je urađen numeričkim putem i pomoću softverskog paketa Ansys, potvrđuje se tačnost izvedenog rešenja.

2 JEDNAČINE KRETANJA

Posmatramo tankozidni štap proizvoljnog otvorenog poprečnog preseka (Sl.1). Na osnovu Vlasovljeve teorije, pomeranje proizvoljne tačke S u ravni poprečnog preseka može se opisati s četiri parametra, tri translacije u_p, v_p, w i rotacije j oko proizvoljno izabranog pola P .

Prof.dr Aleksandar Prokić, Univerzitet u Novom Sadu,
Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a,
aprokic@eunet.rs
acc Martina P.Vojnić, Univerzitet u Novom Sadu,
Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a,
vojnicmartina@yahoo.com

1 INTRODUCTION

Thin-walled composite structures are widely used in many fields of industries. Over a past few decades they became broadly adopted in civil engineering due to many advantages of this material, like lightweight feature in relation of resistance, corrosion resistance, good mechanical characteristics, etc.

This significant increase in the use of this material requests comprehensive analysis approach in order to investigate their behaviour. This paper represents extension of the first part paper named *Laminated thin-walled beams* based on the statical problems of thin-walled sections. Dynamic characteristics of laminated thin-walled beams are presented in the second part of the paper. Equations of motion are derived for a case of arbitrary cross-section and arbitrary stacking sequence; it is shown how suitable choice of cross-section and stacking sequence affects on equations of motion. For a specific case, a closed-form solution for the natural frequencies of free harmonic vibrations was derived. Results for the example are obtained numerically and using the commercial software Ansys, they verify the accuracy of the derived solutions.

2 EQUATIONS OF MOTION

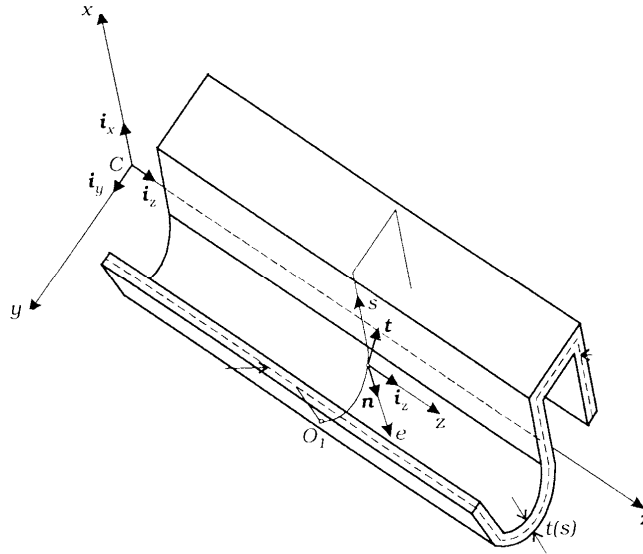
A thin-walled beam of an arbitrary open cross-section is considered (Fig.1). Based on Vlasov's theory, the displacements of an arbitrary point S of cross-section can be described by four components, three translations u_p, v_p, w and rotation j about the arbitrarily taken pole P .

Aleksandar Prokić, PhD, University of Novi Sad, Faculty of Civil Engineering in Subotica, Kozaračka 2a,
aprokic@eunet.rs
acc Martina P.Vojnić, University of Novi Sad, Faculty of Civil Engineering in Subotica, Kozaračka 2a,
vojnicmartina@yahoo.com

$$\begin{aligned}
 u_* &= u_p - j (y - y_p) \\
 v_* &= v_p + j (x - x_p) \\
 w_* &= w - u'_p x - v'_p y - j' W_p
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

gde W_p predstavlja uopštenu sektorsku koordinatu u odnosu na pol P .

where W_p represents warping function with respect to the pole P .



Sl. 1 Tankozidni štap proizvoljnog otvorenog poprečnog preseka
Fig. 1 Thin-walled beam of arbitrary cross section

Na osnovu pretpostavki usvojenih u teoriji tankozidnih štapova, deformacijske veličine koje su različite od nule jesu dilatacija i klizanje.

Based on the assumptions adopted in the theory of thin-walled beams, strain values that are different from zero are strain and shear.

$$\begin{aligned}
 e_z &= \frac{\partial w_z}{\partial z} = w' - u''_p x - v''_p y - j'' W_p \\
 g_{sz} &= g_s = 2j' e
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

gde e predstavlja rastojanje između posmatrane tačke i srednje linije preseka, mereno duž normale n .

where e is the distance of the observed point from the middle surface measured along the normal n .

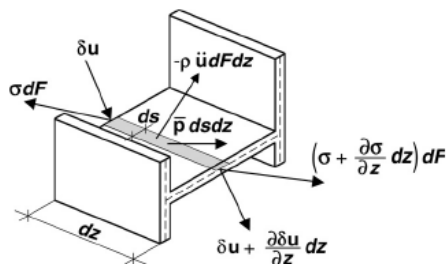
Redukujući normalne napone na težište, a smičuće napone na pol P , dobijamo izraze za presečne sile u sledećem obliku

Reducing the normal stresses on the center of gravity and shear stresses on the pole P , for stress resultants the following expressions are obtained:

$$\begin{aligned}
 N &= \iint_F s_z dF \\
 M_x &= \iint_F s_z y dF \\
 M_y &= -\iint_F s_z x dF \\
 V_x &= -\iint_F t_{zs} \sin \alpha dF \\
 V_y &= \iint_F t_{zs} \cos \alpha dF \\
 T_p &= \iint_F t_{zs} h_p dF \\
 T_s &= 2 \iint_F t_{zs} e dF \\
 M_{wp} &= \iint_F s_z W_p dF
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

U jednačinama (3), N predstavlja normalnu silu, M_x i M_y momente savijanja u odnosu na x i y osu, V_x i V_y transverzalne sile u x i y pravcu, T_p torzioni moment, T_S Saint Venant-ov moment torzije, M_{wp} bimoment.

Jednačine kretanja izvedene su primenom principa virtualnih pomeranja. Posmatramo diferencijalno mali element štapa izložen dejstvu spoljašnjeg opterećenja p , zadatog po jedinici srednje površi štapa.



Vektor napona definisan je kao:

Stress vector is defined by:

$$\mathbf{s} = t_{zs} \mathbf{t} + s_z \mathbf{i}_z = -t_{zs} \sin \alpha \mathbf{i}_x + t_{zs} \cos \alpha \mathbf{i}_y + s_z \mathbf{i}_z \quad (4)$$

Vektor virtualnih pomeranja usvajamo u istoj formi kao i vektor stvarnih pomeranja:

The vector of virtual displacements is adopted in the same form as a vector of real displacements:

$$\begin{aligned} du &= du_x \mathbf{i}_x + dv_y \mathbf{i}_y + dw_z \mathbf{i}_z = \\ &= [du_p - dj(y - y_p)] \mathbf{i}_x + [dv_p + dj(x - x_p)] \mathbf{i}_y + (dw - du'_p x - dv'_p y - dj w_p) \mathbf{i}_z \end{aligned} \quad (5)$$

Parametri virtualnih pomeranja jesu proizvoljne funkcije koordinata i ne zavise od spoljašnjeg opterećenja.

Virtual displacements parameters are arbitrary functions of coordinates and do not depend upon external loads.

Princip virtualnih pomeranja glasi:

The virtual work expression is

$$dW + dU = 0 \quad (6)$$

gde je sa dW označen rad spoljašnjih i gravitacionih sila pri zadatim virtualnim pomeranjima du , a dU predstavlja odgovarajući rad unutrašnjih sila.

Where dW are the virtual work of external loads and inertia forces through virtual displacements du and dU the virtual work of actual stresses realized through virtual strains.

Rad spoljašnjih i gravitacionih sila, redukovano na jedinicu dužine ose štapa, iznosi

The virtual work of external loads and inertia forces per unit length of the element is:

$$dW = \iint_F (s_z du + s du_z) dF + \int_S \bar{p} du ds - r \iint_F \mathbf{r} u dF \quad (7)$$

gde r predstavlja gustinu, a \mathbf{r} vektor ubrzanja dat je kao:

where r is the density, and \mathbf{r} is the acceleration vector given by:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r_x \mathbf{i}_x + r_y \mathbf{i}_y + r_z \mathbf{i}_z = \\ &= [r_p - j r(y - y_p)] \mathbf{i}_x + [r_p + j r(x - x_p)] \mathbf{i}_y + (r - r_p x - r_p y - j r w_p) \mathbf{i}_z \end{aligned} \quad (8)$$

Uvrštavajući jednačine (4), (5) i (8) u (7), dobijamo sledeći izraz za dW :

Substituting (4), (5) and (8) into (7) we get following equation for dW :

$$\begin{aligned}
dW = & \iint_F \left\{ -t'_{zs} \sin a \left[du_p - dj(y - y_p) \right] + t'_{zs} \cos a \left[dv_p + dj(x - x_p) \right] + \right. \\
& + s'_z (dw - dv'_p y - du'_p x - dj' w_p) - t_{zs} \sin a \left[du'_p - dj'(y - y_p) \right] + \\
& + t_{zs} \cos a \left[dv'_p + dj'(x - x_p) \right] + s_z (dw' - dv''_p y - du''_p x - dj'' w_p) \left. \right\} dF + \\
& + \int_s \left\{ \bar{p}_x \left[du_p - dj(y - y_p) \right] + \bar{p}_y \left[dv_p + dj(x - x_p) \right] + \right. \\
& \left. + \bar{p}_z (dw - dv'_p y - du'_p x - dj' w_p) \right\} dS - r \iint_F (du_x \otimes \otimes + dv_x \otimes \otimes + dw_x \otimes \otimes) dF
\end{aligned} \tag{9}$$

Rad unutrašnjih sila jednak je negativnom radu komponentalnih napona pri zadatim virtualnim deformacijama. Redukovan na jedinicu dužine štapa, on iznosi:

The virtual work of internal load due to the corresponding variation of deformation, per unit length of element, is:

$$dU = - \iint_F (s_z de_z + t_s dg_s) dF \tag{10}$$

Koristeći izraze (2) za rad unutrašnjih sila, dobijamo:

Using expressions (2) for virtual strains we get:

$$dU = - \iint_F \left[s_z (dw' - du''_p x - dv''_p y - dj'' w_p) + t_s 2dj' e \right] dF \tag{11}$$

Pogodnim grupisanjem nepoznatih u jednačinama (9) i (11) prema virtualnim pomeranjima, princip virtualnih pomeranja može se izraziti u sledećem obliku:

By suitable rearrangement of equations (9) and (11) in accordance with virtual displacement parameters, the principle of virtual work may be expressed as:

$$\begin{aligned}
& dw \left\{ \iint_F s'_z dF - r \iint_F \otimes \otimes dF + \int_s \bar{p}_z ds \right\} + du_p \left\{ - \iint_F t'_{zs} \sin a dF - r \iint_F \otimes \otimes dF + \int_s \bar{p}_x ds \right\} + \\
& + dv_p \left\{ \iint_F t'_{zs} \cos a dF - r \iint_F \otimes \otimes dF + \int_s \bar{p}_y ds \right\} + \\
& + dj \left\{ \iint_F t'_{zs} h_p dF + r \iint_F \left[(y - y_p) \otimes \otimes - (x - x_p) \otimes \otimes \right] dF + \int_s \left[\bar{p}_y (x - x_p) - \bar{p}_x (y - y_p) \right] ds \right\} - \\
& - du'_p \left\{ \iint_F (s'_z x + t_{zs} \sin a) dF - r \iint_F x \otimes \otimes dF + \int_s \bar{p}_z x ds \right\} - \\
& - dv'_p \left\{ \iint_F (s'_z y + t_{zs} \cos a) dF - r \iint_F y \otimes \otimes dF + \int_s \bar{p}_z y ds \right\} - \\
& - dj' \left\{ \iint_F (s'_z w_p + t_{zs} h_p + 2t_s e) dF - r \iint_F w_p \otimes \otimes dF + \int_s \bar{p}_z w_p ds \right\} = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

Pošto parametri pomeranja mogu imati proizvoljne vrednosti, jednačina (12) biće zadovoljena samo ako su izrazi u velikim zagradama jednaki nuli.

Since the virtual displacement parameters can have arbitrary values, equation (12) will be satisfied if the expressions in great brackets vanish.

Koristeći izraze za presečne sile (3), dobijamo:

Using the expressions for stress resultants (3) one obtains:

$$\begin{aligned}
N' - r \iint_F \sigma_z dF + p_z &= 0 \\
V'_x - r \iint_F \sigma_x dF + p_x &= 0 \\
V'_y - r \iint_F \sigma_y dF + p_y &= 0 \\
T'_p + r \iint_F [(y - y_p) \sigma_x - (x - x_p) \sigma_y] dF + m_p &= 0 \\
M'_y + V'_x + r \iint_F x \sigma_x dF + m_y &= 0 \\
M'_x - V'_y - r \iint_F y \sigma_y dF + m_x &= 0 \\
M'_{wp} - T'_p + T'_s - r \iint_F w_p \sigma_z dF + m_{wp} &= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Presečne sile V_x, V_y, T_p mogu se eliminisati iz jednačina (13), kako bismo dobili četiri jednačine:

The forces V_x, V_y, T_p can be eliminated from equation (13) in order to obtain four equations:

$$\begin{aligned}
N' - r \iint_F \sigma_z dF + p_z &= 0 \\
M''_y + r \iint_F x \sigma_x dF + r \iint_F \sigma_x dF - p_x + m'_y &= 0 \\
M''_x - r \iint_F y \sigma_y dF - r \iint_F \sigma_y dF + p_y + m'_x &= 0 \\
M''_{wp} + T'_s - r \iint_F w_p \sigma_z dF + r \iint_F [(y - y_p) \sigma_x - (x - x_p) \sigma_y] dF + m_p + m'_{wp} &= 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Presečne sile mogu se izraziti u funkciji nepoznatih pomerenja. Ispisana u matričnoj formi glasi:

The stress resultants can be expressed directly in terms of the displacements. The equations are written in matrix form:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ -M_x \\ -M_{wp} \\ T_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{com} & -S_{x,com} & -S_{y,com} & -S_{wp,com} & S_{e,com} \\ -S_{x,com} & I_{xx,com} & I_{xy,com} & I_{xwp,com} & -I_{xe,com} \\ -S_{y,com} & I_{xy,com} & I_{yy,com} & I_{ywp,com} & -I_{ye,com} \\ -S_{wp,com} & I_{xwp,com} & I_{ywp,com} & I_{wpwp,com} & -I_{wpe,com} \\ S_{e,com} & -I_{xe,com} & -I_{ye,com} & -I_{wpe,com} & I_{ee,com} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w' \\ u''_p \\ v''_p \\ j'' \\ j' \end{bmatrix} \tag{15}$$

Pogodnim izborom položaja i orijentacije koordinatnih osa, možemo zapisati:

Selecting appropriate position and orientation of coordinate axis we can write

$$\begin{aligned}
S_{x,com} &= 0 \\
S_{y,com} &= 0 \\
I_{xy,com} &= 0
\end{aligned} \tag{16}$$

Sledeći uslovi mogu se zadovoljiti pogodnim izborom pola P i nulte tačke O_1 :

The following conditions can be satisfied by selecting the appropriate position of the pole P and the point zero O_1 :

$$\begin{aligned}
S_{wp,com} &= 0 \\
I_{xwp,com} &= 0 \\
I_{ywp,com} &= 0
\end{aligned} \tag{17}$$

Treba napomenuti da položaj tačaka C, P i O_1 ne zavisi samo od geometrije poprečnog preseka, već i od materijalnih karakteristika laminata.

Uzimajući u obzir uslove (16) i (17), dobijamo pojednostavljene izraze za presečne sile:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ -M_x \\ -M_{w_D} \\ T_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{com} & 0 & 0 & 0 & S_{e,com} \\ 0 & I_{xx,com} & 0 & 0 & -I_{xe,com} \\ 0 & 0 & I_{yy,com} & 0 & -I_{ye,com} \\ 0 & 0 & 0 & I_{w_D w_D,com} & -I_{w_D e,com} \\ S_{e,com} & -I_{xe,com} & -I_{ye,com} & -I_{w_D e,com} & I_{ee,com} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w' \\ u_D'' \\ v_D'' \\ j'' \\ j' \end{bmatrix} \quad (18)$$

Uvrštavajući jednačinu (18) u (14), dobijamo jednačine koje predstavljaju jednačine kretanja tankozidnog kompozitnog štapa proizvoljnog otvorenog poprečnog preseka.

$$\begin{bmatrix} F_{com} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx,com} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy,com} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{w_D w_D,com} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w''' \\ u_P''' \\ v_P''' \\ j''' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & S_{e,com} \\ 0 & 0 & 0 & -I_{xe,com} \\ 0 & 0 & 0 & -I_{ye,com} \\ -S_{e,com} & I_{xe,com} & I_{ye,com} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w'' \\ u_P'' \\ v_P'' \\ j'' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{ee,com} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w' \\ u_P' \\ v_P' \\ j' \end{bmatrix} - R \begin{bmatrix} F & -S_x & -S_y & -S_{w_P} \\ -S_x & I_{xx} & I_{xy} & I_{xw_P} \\ -S_y & I_{xy} & I_{yy} & I_{yw_P} \\ -S_{w_P} & I_{xw_P} & I_{yw_P} & I_{w_P w_P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u_P \\ v_P \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & y_P F - S_y \\ 0 & 0 & F & -x_P F + S_x \\ 0 & y_P F - S_y & -x_P F + S_x & I_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u_P \\ v_P \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p'_z \\ p_x - m'_y \\ p_y + m'_x \\ m_P + m'_{w_P} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Analizirajući ovaj sistem jednačina, možemo zaključiti da se diferencijalne jednačine kretanja ne mogu razdvojiti, što znači da se jednačine koje opisuju aksijalne, transverzalne i torzione vibracije moraju rešavati zajedno.

3 POPREČNI PRESEK SIMETRIČAN OKO OBE OSE

Ukoliko posmatramo nosač koji je simetričan oko dve ose s laminatima postavljenim antisimetrično u odnosu na geometrijske ose, elementi koji su jednaki nuli jesu sledeći:

$$I_{xe,com} = I_{ye,com} = I_{w_D e,com} = 0 \quad (20)$$

Kako se glavne centralne ose za kompozitni poprečni presek poklapaju sa osama za homogeni poprečni presek, možemo zapisati:

$$S_x = S_y = S_{w_D} = I_{xy} = I_{xw_D} = I_{yw_D} = 0 \quad (21)$$

It should be noted that positions of points C, P i O_1 do not depend only on the geometry of the cross section but also on the material properties of laminates.

Taking into account the conditions (16) and (17) we get simplified expressions for the cross section forces

Substituting equation (18) into (14) we get equations that represent equations of motion of thin-walled beam with arbitrary open cross-section

Analyzing this system of equations we can conclude that the differential equations of motion cannot be separated, meaning that the equations describing the axial, transverse and torsional vibrations must be solved simultaneously.

3 THE CROSS-SECTION SYMMETRICAL ABOUT TWO AXIS

If we observe the beams symmetrical around two axes with antisymmetric orientations of the laminas in relation to geometrical axis, elements of the matrix equal to zero are:

Kako je nosač simetričan, težište se poklapa sa centrom smicanja, pa je $x_D = y_D = 0$

U tom slučaju, jednačine (19) sledećeg su oblika:

For double symmetry centre of gravity overlaps with shear centre, meaning $x_D = y_D = 0$

In that case equation (19) is following

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} F_{com} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx,com} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy,com} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{w_D w_D,com} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w''' \\ u_P''' \\ v_P''' \\ j''' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & S_{e,com} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_{e,com} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w'' \\ u_P'' \\ v_P'' \\ j'' \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{ee,com} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w' \\ u_P' \\ v_P' \\ j' \end{bmatrix} - \mathbf{r} \begin{bmatrix} F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{w_D w_D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w} \\ \bar{u}_P \\ \bar{v}_P \\ \bar{j} \end{bmatrix} + \\
 & + \mathbf{r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w} \\ \bar{u}_P \\ \bar{v}_P \\ \bar{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p'_z \\ p_x - m'_y \\ p_y + m'_x \\ m_P + m'_{w_P} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{22}$$

4 POPREČNI PRESEK SIMETRIČAN OKO OBE OSE S LAMINAMA POSTAVLJENIM SIMETRIČNO U ODNOSU NA SREDNJU LINIJU

Ukoliko posmatramo nosač koji je simetričan oko dve ose s laminatima postavljenim antisimetrično u odnosu na geometrijske ose i simetrično postavljenim laminatima u odnosu na srednju liniju, elementi koji su jednaki nuli jesu sledeći:

4 THE CROSS SECTION SYMMETRICAL ABOUT TWO AXES WITH SYMMETRIC ORIENTATION OF LAMINAS IN RELATION TO THE MIDLINE

If we consider the beams symmetrical around two axes with antisymmetric orientations of the laminas in relation to geometrical axis and symmetrically placed laminas with respect to the midline, the matrix elements that are equal to zero are the following:

$$S_{e,com} = I_{xe,com} = I_{ye,com} = I_{w_D e,com} = 0 \tag{23}$$

Kako se glavne centralne ose za kompozitni poprečni presek poklapaju sa osama za homogeni poprečni presek, možemo zapisati:

As the main central axis of the composite cross-section overlap with the axis of homogenous cross-section we can write:

$$S_x = S_y = S_{w_D} = I_{xy} = I_{xw_D} = I_{yw_D} = 0 \tag{24}$$

Kako je nosač simetričan, težište se poklapa sa centrom smicanja, pa je $x_D = y_D = 0$

For double symmetry centre of gravity overlaps with shear centre, meaning $x_D = y_D = 0$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} F_{com} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx,com} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy,com} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{w_D w_D,com} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w''' \\ u_P''' \\ v_P''' \\ j''' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{ee,com} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w'' \\ u_P'' \\ v_P'' \\ j'' \end{bmatrix} \\
 & - \mathbf{r} \begin{bmatrix} F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{w_D w_D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w} \\ \bar{u}_P \\ \bar{v}_P \\ \bar{j} \end{bmatrix} + \mathbf{r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w} \\ \bar{u}_P \\ \bar{v}_P \\ \bar{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p'_z \\ p_x - m'_y \\ p_y + m'_x \\ m_P + m'_{w_P} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{25}$$

5 NOSAČI NESIMETRIČNOG POPREČNOG PRESEKA S LAMINAMA POD UGLOM OD 0 I 90 STEPENI (CROSS-PLY LAMINATES)

Ako su lamine postavljene pod pravim uglom u odnosu na geometrijske ose, elementi koji su jednaki nuli jesu sledeći:

$$S_{e,com} = I_{xe,com} = I_{ye,com} = I_{w_D e,com} = 0 \quad (26)$$

Kako je nosač nesimetričan, glavne centralne ose za kompozitni i homogeni presek se ne poklapaju.

5 BEAMS WITH UNSYMMETRICAL CROSS-SECTION AND LAMINATES AT THE 0 AND 90 DEGREES ANGLE (CROSS-PLY LAMINATES)

If the laminates are placed at the right angle in relation to the geometric axis, elements of matrix of coefficients that are equal to zero are following:

As the beam is unsymmetrical axis of the composite cross-section do not overlap with the axis of homogeneous cross-section.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} F_{com} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx,com} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy,com} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{w_D w_D,com} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w''' \\ u_p''' \\ v_p''' \\ j''' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{ee,com} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w' \\ u_p'' \\ v_p'' \\ j'' \end{bmatrix} \\ & - \Gamma \begin{bmatrix} F & -S_x & -S_y & -S_{w_p} \\ -S_x & I_{xx} & I_{xy} & I_{xw_p} \\ -S_y & I_{xy} & I_{yy} & I_{yw_p} \\ -S_{w_p} & I_{xw_p} & I_{yw_p} & I_{w_p w_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u_p \\ v_p \\ j \end{bmatrix} + \\ & + \Gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & y_p F - S_y \\ 0 & 0 & F & -x_p F + S_x \\ 0 & y_p F - S_y & -x_p F + S_x & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u_p \\ v_p \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p'_z \\ p_x - m'_y \\ p_y + m'_x \\ m_p + m'_{w_p} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

6 REŠENJE JEDNAČINA ZA SLUČAJ OBOSTRANE SIMETRIJE PRESEKA

Rešenje jednačine (22) možemo tražiti u obliku:

$$\begin{bmatrix} w(z,t) \\ u_D(z,t) \\ v_D(z,t) \\ j(z,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(z) \\ U(z) \\ V(z) \\ \Phi(z) \end{bmatrix} \sin pt \quad (28)$$

Uvrštavajući jednačinu (28) u (22), dobijamo:

6 SOLUTION FOR A CROSS-SECTION SYMMETRICAL ABOUT TWO AXIS

The solution of equation (22) may be expressed in the form:

Substituting Eq (28) into (22) yields:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} F_{com} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx,com} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy,com} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{w_D w_D,com} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W''' \\ U''' \\ V''' \\ \Phi''' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & S_{e,com} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_{e,com} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W'' \\ U'' \\ V'' \\ \Phi'' \end{bmatrix} - \\
& - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{ee,com} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W' \\ U' \\ V' \\ \Phi' \end{bmatrix} + r p^2 \begin{bmatrix} F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{w_D w_D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W'' \\ U'' \\ V'' \\ \Phi'' \end{bmatrix} + \\
& - r p^2 F \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_D}{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ U \\ V \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{29}$$

U slučaju slobodnooslonjene grede, granični uslovi su sledeći:

In the case of a beam with simply supported ends the end conditions are:

$$\begin{bmatrix} W \\ U \\ V \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} W'' \\ U'' \\ V'' \\ \Phi'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Jednačina (30) biće zadovoljena sledećim:

Equation (30) will be satisfied by taking:

$$\begin{bmatrix} W(z) \\ U(z) \\ V(z) \\ \Phi(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_W \\ C_U \\ C_V \\ C_\Phi \end{bmatrix} \sin I_n z \tag{31}$$

Gde su C_W, C_U, C_V, C_Φ konstante, a $I_n = \frac{np}{L}$

Where C_W, C_U, C_V, C_Φ are the constants and

Uvrštavajući jednačinu (31) u jednačinu (29), dobijamo jednačinu:

$$I_n = \frac{np}{L}$$

Substituting Eq (31) into (29) results in:

$$\begin{aligned}
& I_n^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx,com} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy,com} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{w_D w_D,com} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_W \\ C_U \\ C_V \\ C_\Phi \end{bmatrix} + I_n^2 \begin{bmatrix} -F_{com} & 0 & 0 & -S_{e,com} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{e,com} & 0 & 0 & I_{ee,com} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_W \\ C_U \\ C_V \\ C_\Phi \end{bmatrix} - \\
& - r p^2 I_n^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{w_D w_D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_W \\ C_U \\ C_V \\ C_\Phi \end{bmatrix} - r p^2 F \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_D}{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_W \\ C_U \\ C_V \\ C_\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{32}$$

Analizirajući gornji sistem jednačina, može se zaključiti da su druga i treća jednačina nezavisne i da se one mogu rešavati pojedinačno. Prva i četvrta jednačina su međusobno spregnute. Rešenje tražimo tako što determinantu sistema izjednačimo s nulom.

Analyzing this system of equations we can conclude that the second and third equation are uncoupled from the rest of the system and may be analyzed. First and the fourth equation are coupled. Solution is expressed setting the determinant of the above system equal to zero

$$\begin{vmatrix} -I_n^2 F_{com} + r p^2 F & -I_n^2 S_{e,com} \\ I_n^2 S_{e,com} & I_n^4 I_{w_D w_D, com} + I_n^2 I_{ee, com} - r p^2 I_n^2 I_{w_D w_D} - r p^2 I_D \end{vmatrix} = 0 \quad (33)$$

Rešenje tražimo u sledećem obliku:

yields the following algebraic frequency equation

$$a \cdot p^4 + b \cdot p^2 + c = 0 \quad (34)$$

Gde koeficijenti imaju sledeće vrednosti:

with the coefficients:

$$\begin{aligned} a &= -r^2 I_n^2 F I_{w_D w_D} - r^2 I_D F \\ b &= r I_n^4 F_{com} I_{w_D w_D} + r I_n^4 F I_{w_D w_D, com} + r I_n^2 I_D F_{com} + r I_n^2 F I_{ee, com} \\ c &= -I_n^6 F_{com} I_{w_D w_D, com} - I_n^4 F_{com} I_{ee, com} + I_n^4 S_{e, com}^2 \end{aligned} \quad (35)$$

7 NUMERIČKI PRIMER

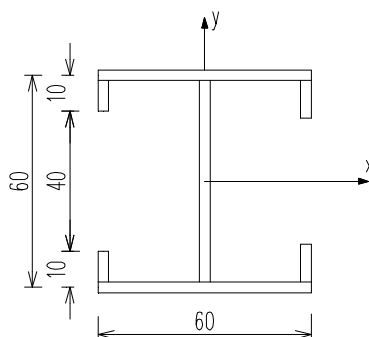
U numeričkom primeru su sračunate frekvencije slobodnooslonjene grede, I poprečnog preseka s proizvoljnim rasporedom laminata. Posmatramo I nosač osovine visine i širine 60 cm. Ukupna debljina nožice i rebra jeste 3 cm. Laminati u nožicama i rebru postavljeni su antisimetrično u odnosu na geometrijske ose, a proizvoljno u odnosu na srednju liniju. Pretpostavlja se da ima četiri lejera, orijentacija u gornjoj nožici je 0/35/75/90, u donjoj nožici 90/-75/-35/0 i u rebru 0/45/-45/0. Urađeni su primeri za nosač dužine 10 m, 15 m i 20 m. Dobijeni rezultati prema napred izvedenim formulama upoređeni su s rezultatima dobijenim pomoću programskog paketa Ansys 12.0

Karakteristike materijala jesu:

$$E_1 = 144 \text{ GPa}, E_2 = 9.65 \text{ GPa}, G_{12} = 4.14 \text{ GPa}, u = 0.3$$

7 NUMERICAL EXAMPLE

In this example natural frequencies for the simply supported I-beam with arbitrary lamination in relation to the midline are evaluated. We consider I-beam that has a flange width 60cm and the height 60cm. Total thicknesses of the web and flanges are 3cm. Laminates in flanges and web are placed antisymmetrical in relation to the geometric axis and arbitrary in relation to the midline. It is assumed to have four layers; orientation in the top flange is 0/35/75/90, in the lower flange 90/-75/-35/0 and in the web 0/45/-45/0. Material properties are: $E_1 = 144 \text{ GPa}$, $E_2 = 9.65 \text{ GPa}$, $G_{12} = 4.14 \text{ GPa}$, $u = 0.3$



Rezultati su prikazani u Tabeli 1.

The results are listed in Table 1.

Frekvencije (Hz) grede u posmatranom primeru

Frequency (Hz) of the beam in observed example

Dužine Length	10 m			15 m			20 m		
	Tačno rešenje Exact solution	Ansys	Greška Error (%)	Tačno rešenje Exact solution	Ansys	Greška Error (%)	Tačno rešenje Exact solution	Ansys	Greška Error (%)
1	15.517	16.308	4.85	7.348	7.448	1.34	4.134	4.237	2.43
2	18.308	19.050	3.89	8.529	8.993	5.16	5.086	5.408	5.95
3	24.673	24.744	0.28	10.987	11.324	2.98	6.184	6.431	3.84

8 ZAKLJUČAK

Primenom principa virtualnih pomeranja, izvedene su jednačine kretanja tankozidnog kompozitnog štapa otvorenog poprečnog preseka. Izvedeno je rešenje za kružne frekvencije slobodnih harmonijskih vibracija. Urađeni primer za slobodnooslonjenu gredu pokazuje da se rešenje dobijeno teorijskim putem u velikoj meri poklapa s rešenjem dobijenim programskim paketom Ansys, čime je potvrđena tačnost izvedenog rešenja.

ZAHVALNOST

Rad je deo projekta broj ON174027, koji je podržalo Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije.

9 LITERATURA REFERENCES

- [1] Vlasov V. Thin-walled elastic beams. Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem; 1961
- [2] Librescu L., Thin-Walled Composite Beams, Springer 2006, Netherland
- [3] Prokić A., Matrična analiza tankozidnih konstrukcija, Izgradnja 1999, Beograd

REZIME

LAMINIRANI TANKOZIDNI NOSAČI – DRUGI DEO

*Aleksandar PROKIĆ
Martina VOJNIC PURČAR*

U radu je predstavljena dinamička analiza tankozidnih kompozitnih štapova otvorenog poprečnog preseka. Jednačine kretanja izvedene su primenom principa virtualnih pomeranja. Za slučaj proizvoljnog poprečnog preseka i proizvoljnog rasporeda laminata, dobija se spregnuti sistem diferencijalnih jednačina. Na isti način kao i u prvom delu rada, izučavaće se uticaj izbora poprečnog preseka, kao i rasporeda i orijentacije laminata na sistem diferencijalnih jednačina.

Ključne reči: lamelirani tankozidni nosači, otvoren i proizvoljan poprečni presek, jednačine kretanja, princip virtualnih pomeranja

8 CONSLUSION

Using the principal of virtual displacements the system of equations of thin-walled composite beams are derived. Solution is derived for natural frequencies of free harmonic vibrations. In the example of simply supported beam it is shown that the solution derived theoretically coincides with the solution obtained with the software package Ansys and that confirms validation of solution.

ACKNOWLEDGEMENTS

Paper is part of the project ON174027 supported by Ministry of Education and Science of the Republic of Serbia

- [4] Jones RM., Mechanics of composite material, New York: McGraw-Hell 1975.
- [5] Prokić A, Vojnić Purčar M., Laminirani tankozidni nosači – prvi deo, Građevinski materijali i konstrukcije 56 (2013) 1 (17-28)
- [6] Ansys, Inc., 275 Technology Dr Canonsburg, PA 15317, USA

SUMMARY

LAMINATED THIN-WALLED BEAMS - SECOND PART

*Aleksandar PROKIC
Martina VOJNIC PURCAR*

In the paper was presented the analysis of the dynamic analysis of the thin-walled composite beams with open cross-section. Equations of motion are derived using the principle of virtual displacements. For a case of arbitrary cross-section and arbitrary stacking sequence differential equations are coupled. In the same way as in the first part of the paper the choice of cross-section as well as the stacking sequence will be examined as the influence on the system of differential equations.

Key words: laminated thin-walled beams, open and arbitrary corss-section, equations of motion, principle of virtual displacements

UPUTSTVO AUTORIMA*

Prihvatanje radova i vrste priloga

U časopisu Materijali i konstrukcije štampaće se neobjavljeni radovi ili članci i konferencijska saopštenja sa određenim dopunama ili bez dopuna, prema odluci Redakcionog odbora, a samo izuzetno uz dozvolu prethodnog izdavača prihvatiti se i objavljeni rad. Vrste priloga autora i saradnika koji će se štampati su: originalni naučni radovi, prethodna saopštenja, pregledni radovi, stručni radovi, konferencijska saopštenja (radovi sa naučno-stručnih skupova), kao i ostali prilozi kao što su: prikazi objekata i iskustava - primeri, diskusije povodom objavljenih radova i pisma uredništvu, prikazi knjiga i zbornika radova, kao i obaveštenja o naučno-stručnim skupovima.

Originalni naučni rad je primarni izvor naučnih informacija i novih ideja i saznanja kao rezultat izvornih istraživanja uz primenu adekvatnih naučnih metoda. Dobijeni rezultati se izlažu kratko, jasno i objektivno, ali tako da poznavalac problema može proceniti rezultate eksperimentalnih ili teorijsko numeričkih analiza i tok razmišljanja, tako da se istraživanje može ponoviti i pri tome dobiti iste ili rezultate u okvirima dopuštenih odstupanja, kako se to u radu navodi.

Prethodno saopštenje sadrži prva kratka obaveštenja o rezultatima istraživanja ali bez podrobnih objašnjenja, tj. kraće je od originalnog naučnog rada. U ovu kategoriju spadaju i diskusije o objavljenim radovima ako one sadrže naučne doprinose.

Pregledni rad je naučni rad koji prikazuje stanje nauke u određenoj oblasti kao plod analize, kritike i komentara i zaključaka publikovanih radova o kojima se daju svi neophodni podaci pregledno i kritički uključujući i sopstvene radove. Navode se sve bibliografske jedinice korišćene u obradi tematike, kao i radovi koji mogu doprineti rezultatima daljih istraživanja. Ukoliko su bibliografski podaci metodski sistematizovani, ali ne i analizirani i raspravljani, takvi pregledni radovi se klasifikuju kao stručni pregledni radovi.

Stručni rad predstavlja koristan prilog u kome se iznose poznate spoznaje koje doprinose širenju znanja i prilagođavanja rezultata izvornih istraživanja potrebama teorije i prakse. On sadrži i rezultate razvojnih istraživanja.

Konferencijsko saopštenje ili rad sopšten na naučno-stručnom skupu koji mogu biti objavljeni u izvornom obliku ili ih autor, u dogovoru sa redakcijom, bitno preradi i proširi. To mogu biti naučni radovi, naročito ako su sopštenja po pozivu Organizatora skupa ili sadrže originalne rezultate prvi put objavljene, pa ih je korisno uz određene dopune učiniti dostupnim široj stručnoj javnosti. Štampaće se i stručni radovi za koje Redakcioni odbor oceni da su od šireg interesa.

Ostali prilozi su prikazi objekata, tj. njihove konstrukcije i iskustava-primeri u građenju i primeni različitih materijala, diskusije povodom objavljenih radova i pisma uredništvu, prikazi knjiga i zbornika radova, kao i obaveštenja o naučno-stručnim skupovima.

Autori uz rukopis predlažu kategorizaciju članka. Svi radovi pre objavljivanja se recenziraju, a o prihvatanju za publikovanje o njihovoj kategoriji konačnu odluku donosi Redakcioni odbor.

Da bi se ubrzao postupak prihvatanja radova za publikovanje, potrebno je da autori uvažavaju Uputstva za pripremu radova koja su navedena u daljem tekstu.

Uputstva za pripremu rukopisa

Rukopis otkucati jednostrano na listovima A-4 sa marginama od 31 mm (gore i dole) a 20 mm (levo i desno), u Wordu fontom Arial sa 12 pt. Potrebno je uz jednu kopiju svih delova rada i priloga, dostaviti i elektronsku verziju na navedene E-mail adrese, ili na CD-u. Autor je obavezan da čuva jednu kopiju rukopisa kod sebe zbog eventualnog oštećenja ili gubitka rukopisa.

Od broja 1/2010. prema odluci Upravnog odbora Društva i Redakcionog odbora, radovi sa pozitivnim recenzijama i prihvaćeni za štampu, publikovaće se na srpskom i engleskom jeziku.

Svaka stranica treba da bude numerisana, a optimalni obim članka na jednom jeziku, je oko 16 stranica (30000 slovnih mesta) uključujući slike, fotografije, tabele i popis literature. Za radove većeg obima potrebna je saglasnost Redakcionog odbora.

Naslov rada treba sa što manje reči (poželjno osam, a najviše do jedanaeset) da opiše sadržaj članka. U naslovu ne koristiti skraćenice ni formule. U radu se iza naslova daju ime i prezime autora, a titule i zvanja, kao ime institucije u podnožnoj napomeni. Autor za kontakt daje telefone, faks i adresu elektronske pošte, a za ostale autore poštansku adresu.

Uz sažetak (rezime) od oko 150 do 200 reči, na srpskom i engleskom jeziku daju se ključne reči (do deset). To je jezgrovit prikaz celog članka i čitaocima omogućuje uvid u njegove bitne elemente.

Rukopis se deli na poglavlja i potpoglavlja uz numeraciju, po hijerarhiji, arapskim brojevima. Svaki rad ima uvod, sadržinu rada sa rezultatima, analizom i zaključcima. Na kraju rada se daje popis literature.

Kod svih dimenzionalnih veličina obavezna je primena međunarodnih SI mernih jedinica.

Formule i jednačine treba pisati pažljivo vodeći računa o indeksima i eksponentima. Autori uz izraze u tekstu definišu simbole redom kako se pojavljuju, ali se može dati i posebna lista simbola u prilogu.

Prilozi (tabele, grafikoni, sheme i fotografije) rade se u crno-belom tehničkom formatu koji obezbeđuje da pri smanjenju na razmere za štampu, po širini jedan do dva stupca (8cm ili 16.5cm), a po visini najviše 24.5cm, ostanu jasni i čitljivi, tj. da veličine slova i brojeva budu najmanje 1.5mm. Originalni crteži treba da budu kvalitetni i u potpunosti pripremljeni za presnimavanje. Mogu biti i dobre, oštre i kontrastne fotokopije. Koristiti fotografije, u crno-belom tehničkom, na kvalitetnoj hartiji sa ostrim konturama, koje omogućuju jasnu reprodukciju. Skraćenice u prilogima koristiti samo izuzetno uz obaveznu legendu. Prilozi se posebno označavaju arapskim brojevima, prema redosledu navođenja u tekstu. Objašnjenje tabela daje se u tekstu.

Potrebno je dati spisak svih skraćenica korišćenih u tekstu.

U popisu literature na kraju rada daju se samo oni radovi koji se pominju u tekstu. Citirane radove treba prikazati po azbučnom redu prezimena prvog autora. Literaturu u tekstu označiti arapskim brojevima u uglastim zagradama, kako se navodi i u Popisu citirane literature, napr [1]. Svaki citat u tekstu mora se naći u Popisu citirane literature i obrnuto svaki podatak iz Popisa se mora navesti u tekstu.

U Popisu literature se navode prezime i inicijali imena autora, zatim potpuni naslov citiranog članka, iza toga sledi ime časopisa, godina izdavanja i početna i završna stranica (od - do). Za knjige iza naslova upisuje se ime urednika (ako ih ima), broj izdanja, prva i poslednja stranicapoglavlja ili dela knjige, ime izdavača i mesto objavljivanja, ako je navedeno više gradova navodi se samo prvi po redu. Kada autor citirane podatke ne uzima iz izvornog rada, već ih je pronašao u drugom delu, uz citat se dodaje «citirano prema...». Neobjavljeni članci mogu se pominjati u tekstu kao «usmeno saopštenje».

Autori su odgovorni za izneseni sadržaj i moraju sami obezbediti eventualno potrebne saglasnosti za objavljivanje nekih podataka i priloga koji se koriste u radu.

Ukoliko rad bude prihvaćen za štampu, autori su dužni da, po uputstvu Redakcije, unesu sve ispravke i dopune u tekstu i prilogima.

Za detaljnija tehnička uputstva za pripremu rukopisa autori se mogu obratiti Redakcionom odboru časopisa.

Rukopisi i prilozi objavljenih radova se ne vraćaju. Sva eventualna objašnjenja i uputstva mogu se dobiti od Redakcionog odbora.

Radovi se mogu slati i na e-mail: folic@uns.ac.rs ili miram@uns.ac.rs i dimk@ptt.rs

Web sajt Društva i časopisa: www.dimk.rs

* Uputstvo autorima je modifikovano i treba ga u pripremi radova slediti.

Izdavanje časopisa "Građevinski materijali i konstrukcije" finansijski su pomogli:



INŽENJERSKA KOMORA SRBIJE

**MINISTARSTVO ZA NAUKU I TEHNOLOŠKI
RAZVOJ SRBIJE**



**UNIVERZITET U BEOGRADU
GRAĐEVINSKI FAKULTET**



**DEPARTMAN ZA GRAĐEVINARSTVO
FAKULTET TENHIČKIH NAUKA NOVI SAD**



INSTITUT IMS AD, BEOGRAD



**UNIVERZITET CRNE GORE
GRAĐEVINSKI FAKULTET - PODGORICA**